§8. Теорема Безу и следствия из нее.

Функция

$$(*) \qquad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, \ldots, a_0$ — вещественные числа, причем $a_n \neq 0$, называется многочленом степени n.

Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $H(x)$ означает найти многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, такие что $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$ для любого x.

Теорема. Если $P(x)$ — многочлен степени n, $H(x)$ — многочлен степени m, $m < n$, то существуют многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, такие что $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$, причем степень $R(x)$ меньше m. Многочлен $Q(x)$ называется частным, а $R(x)$ — остатком.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$, то есть существует многочлен $Q(x)$, такой что $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$.

Из теоремы Безу следует, что если $P(a) = 0$, то существует многочлен $Q(x)$, такой что $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Многочлены можно делить разными способами. Поделим $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ на $x + 5$.

Первый способ: $x^3+2x^2+3x+4 = x^2(x+5)-3x^2+3x+4 = x^2(x+5)-3x(x+5)+15x+3x+4 = x^2(x+5)-3x(x+5)+18x+4 = x^2(x+5)-3x(x+5)+18(x+5)-90+4 = (x^2-3x+18)(x+5)-86$.

Второй способ: деление в столбик.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & +3x & +4 & x+5 \\ \cline{5-5}
x^3 & +5x^2 & & & x^2-3x+18 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & +3x & & \\
 & -3x^2 & -15x & & \\ \cline{2-3}
 & & 18x & +4 & \\
 & & 18x & +90 & \\ \cline{3-4}
 & & & -86 &
\end{array}
$$

Третий способ: схема Горнера. Этот способ возможен только при делении на двучлен $x - b$. Покажем на примере деления многочлена $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ на $x - b$.

Сначала заполняем верхнюю строчку, выписываем туда коэффициенты многочлена, а также записываем число b в левую клетку второй строчки:

	a_3	a_2	a_1	a_0
b				

Затем заполняем вторую строку следующим образом:

	a_3	a_2	a_1	a_0
b	a_3	$ba_3 + a_2$	$b(ba_3 + a_2) + a_1$	$b(b(ba_3 + a_2) + a_1) + a_0$

Число в правом нижнем углу таблицы — остаток ($P(b)$). Числа во второй строке между числом b и остатком — коэффициенты частного в порядке убывания.

Аналогично выписывается схема Горнера для уравнений других степеней.

Поделим $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ на $x + 5$ с помощью схемы Горнера:

	1	2	3	4
-5				

;

	1	2	3	4
-5	*1*			

;

	1	2	3	4
-5	*1*	$-5 \cdot 1 + 2$		

;

	1	2	3	4
-5	*1*	*−3*	$-5\cdot(-3)+3$	

;

	1	2	3	4
-5	*1*	*−3*	*18*	$-5\cdot 18+4$

;

	1	2	3	4
-5	1	-3	18	-86

.

Табличку нужно писать один раз (а не шесть), здесь просто продемонстрирован порядок заполнения.

Частное: $x^2-3x+18$, остаток -86.

То есть $x^3+2x^2+3x+4=(x^2-3x+18)(x+5)-86$ или

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x+5}=x^2-3x+18+\frac{-86}{x+5}.$$

Задача 1. Разложить многочлен $P(x)=x^3-7x+6$ на множители.

Решение. Заметим, что $P(1)=0$. Следовательно, $P(x)$ делится на $x-1$ без остатка. Поделим по схеме Горнера:

	1	0	-7	6
1	1	$1\cdot 1+0$		

;

	1	0	-7	6
1	1	1	$1\cdot 1-7$	

;

	1	0	-7	6
1	1	1	-6	0

.

Получаем $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$. Корнями $x^2+x-6=0$ являются числа -3 и 2. Следовательно, $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$.

Рассмотрим уравнение

$$(*)\qquad a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,$$

где $a_n,\ldots,a_0$ — вещественные числа, причем $a_n\neq 0$.

Утверждение. Если рациональное число $x=\frac{p}{q}$ (p — целое, q — натуральное, дробь несократимая) является корнем уравнения $(*)$, то a_0 делится на p, а a_n делится на q.

Доказательство. Подставим $x=\frac{p}{q}$ в уравнение $(*)$ и домножим его на q^n. Получим

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

Перенесем a_0q^n вправо, а в левой части вынесем p за скобку:

$$(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\ldots+a_1q^{n-1})p=-a_0q^n.$$

Слева и справа у нас целые числа, так как все слагаемые целые. Левая часть делится на p, следовательно, правая часть тоже делится на p. Но p и q не имеют общих множителей, следовательно, a_0 делится на p.

Аналогично доказывается то, что a_n делится на q. Переносим a_np^n в правую часть, тогда левая часть делится на q. Следовательно, правая часть делится на q, то есть a_n делится на q.

Задача 2. Решить уравнение $2x^3-7x^2+10x-6=0$.

Решение. Проверим, есть ли у уравнения рациональные корни. Если $\frac{p}{q}$ (p — целое, q — натуральное, дробь несократимая) является корнем, то 6 делится на p, а 2 делится на q. Выпишем все возможные p и q:

$$p:\ 1,2,3,6,-1,-2,-3,-6;$$
$$q:\ 1,2;$$
$$\frac{p}{q}:\ 1,2,3,6,-1,-2,-3,-6,\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2}.$$

Сразу заметим, что корень не может быть отрицательным числом (иначе сумма буден меньше нуля). Корень также не может быть нечетным числом, потому что тогда получится, что сумма трех четных и одного нечетного равна нулю. Остались $2,6,\frac{1}{2},\frac{3}{2}$. Подставляем в уравнение, проверяем. Как только находим корень — заканчиваем подставлять, можно уже будет понизить степень уравнения.

Удобно подставлять с помощью схемы Горнера (но можно и стандартным образом, просто дольше):

	2	−7	10	−6
2	2	−3	4	2

;

	2	−7	10	−6
6	2	5	40	234

;

	2	−7	10	−6
$\frac{1}{2}$	2	−6	7	$-\frac{5}{2}$

;

	2	−7	10	−6
$\frac{3}{2}$	2	−4	4	0

.

Число $\frac{3}{2}$ является корнем уравнения. Нам подошло только последнее, обычно больше везет. Уравнение принимает вид $(x-\frac{3}{2})(2x^2-4x+4)=0$. Уравнение $2x^2-4x+4=0$ не имеет корней.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Замечание. Для того, чтобы подставить 4 числа в уравнение, не обязательно писать 4 схемы Горнера, можно обойтись одной:

	2	**−7**	**10**	**−6**
2	2	−3	4	2
6	2	5	40	234
$\frac{1}{2}$	2	−6	7	$-\frac{5}{2}$
$\frac{3}{2}$	2	−4	4	0

.