§6 Свойства квадратичной функции.

Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ называется квадратичной функцией. Для того, чтобы изучить ее свойства, выделим полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \tfrac{b}{2a} \cdot x + (\tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2\right) + c =$$
$$= a\left((x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2\right) + c = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c.$$

Обозначим $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и $y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c$. В новых обозначениях имеем: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. График этой функции — парабола, полученная из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов:

- сдвига вдоль оси O_x на $|x_0|$ единиц (вправо, если $x_0 > 0$ или влево, если $x_0 < 0$);
- сдвига вдоль оси O_y на $|y_0|$ единиц (вверх, если $y_0 > 0$ или вниз, если $y_0 < 0$).

Точка с координатами $(x_0; y_0)$ называется вершиной параболы. Для того, чтобы правильно построить график функции, необходимо также найти точки пересечения графика с осями координат.

Задача 1. Посторoить график функции $y = 0.5x^2 - x - 1$.

Решение. Первый способ. Найдем вершину параболы $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 0.5} = 1$; $y = -1.5$. Затем найдем значения в соседних точках:

x	-1	0	1	2	3
y	0.5	-1	-0.5	-1	0.5

, заметим, что значения в точках, симметричных относительно от вершины, одинаковы. Кроме этого, необходимо найти точки пересечения графика с осями координат (см. второй способ). После этого строим график.

Второй способ. Выделим полный квадрат:

$$0.5x^2 - x - 1 = 0.5(x^2 - 2x) - 1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{(x-1)^2}{2} - 1.5.$$

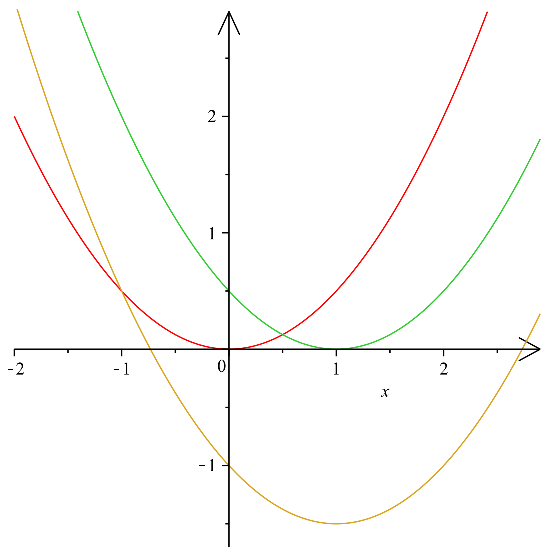

рис.1

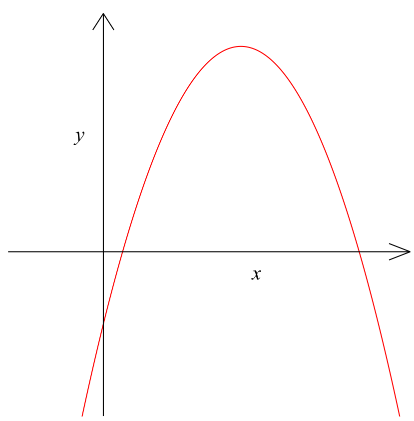

рис.2

Сначала построим график функции $y = \frac{x^2}{2}$ (на рисунке 1 он изображен красным цветом).

Затем сдвинем его вправо вдоль оси O_x на 1, получим график $y = \frac{(x-1)^2}{2}$ (он изображен зеленым цветом).

Сдвинем зеленый график вниз по оси O_y на 1.5, получим искомый график $y = \frac{(x-1)^2}{2} - 1.5$ (он изображен коричневым цветом).

Вершина параболы в точке $(1; -1.5)$. График пересекает ось y в точке $(0; -1)$. Решив уравнение $\frac{(x-1)^2}{2} - 1.5 = 0$, находим точки, в которых график пересекает ось O_x: $(1-\sqrt{3}; 0)$ и $(1+\sqrt{3}; 0)$.

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось O_y в точке $(0; c)$, а ось O_x в двух точках, если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет 2 корня. Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет ровно один корень, то парабола имеет ровно одну общую точку с осью O_x, и говорят, что она касается оси O_x. Если уравнение корней не имеет, то парабола не пересекает ось O_x.

Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

По графику параболы можно сразу сделать вывод о знаках чисел a, b, c.

Задача 2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ изображена на рис. 2. Определить знаки чисел a, b, c.

Решение. График функции пересекает ось O_y в точке $(0; c)$. Следовательно, $c < 0$. Так как оси параболы наравлены вниз, то $a < 0$. Вершина парабола в точке $(x_0; y_0)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Из рисунка следует, что $x_0 > 0$, то есть $\frac{b}{2a} < 0$. Так как $a < 0$, то $b > 0$.

Кроме того мы можем сказать, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, то есть $D = b^2 - 4ac > 0$.

Задача 3. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ изображена на рис. 2. Определить знак числа $a + c - b$.

Решение. При $x = -1$ имеем $y = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c$. На рисунке 2 парабола ниже оси O_x для всех $x < 0$. Следовательно, $a + c - b < 0$.

Ответ: $a + c - b < 0$.

Задача 4. Пусть $f(x) = -2x^2 + bx + c$, уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 различных корня $x_1 < x_2$. При каких значениях $f(3)$ выполняется неравенство $x_1 < 3 < x_2$?

Решение. Рассмотрим параболу $y = -2x^2 + bx + c$. Ее ветви направлены вниз (рисунок 3), так как коэффициэнт при x^2 меньше нуля (равен -2). Парабола пересекает ось O_x в точках x_1 и x_2.

Так как ветви параболы направлены вниз, то если x находится между x_1 и x_2, то $f(x) > 0$, а в остальных случаях $f(x) \leq 0$. Следовательно, $x_1 < 3 < x_2$ тогда и только тогда, когда $f(3) > 0$.

Ответ: $f(3) > 0$.

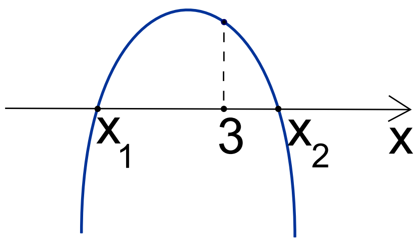

рис.3

Пусть x_1, x_2, x_3 — различные числа.

Теорема. Через любые три точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой, можно провести параболу, и притом только одну.

Пусть точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ не лежат на одной прямой. Тогда парабола, проходящая через эти точки, задается уравнением

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Проверить это легко: достаточно подставить x_1, x_2 и x_3.

Тот факт, что парабола единственна, доказать не сложно, но мы здесь этого делать не будем.

Эту задачу можно решать и другим способом: подставить точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ и решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными a, b, c.

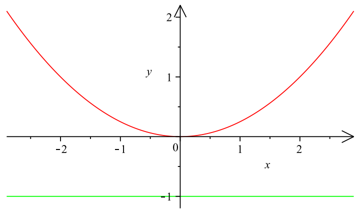

рис.4

Задача 5. Прямая l задана уравнением $y = -1$; точка A имеет координаты $(0; 1)$. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от прямой l и точки A.

Решение. Расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Пусть точка M имеет координаты $(x; y)$. Тогда $AM = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. В нашем случае расстояние зависит только от координаты y и равно $y + 1$.

То, что точка M равноудалена от прямой l и точки A, означает, что расстояния AM и $y + 1$ совпадают. Таким образом, искомое множество точек — множество решений уравнения

$$y + 1 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

Отметив, что $y \geq -1$, возводим в квадрат: $y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1$. Уравнение принимает вид $4y = x^2$, то есть искомое множество точек — это парабола $y = \frac{1}{4}x^2$ (см. рисунок 4 (красным цветом)).

Ответ: $y = \frac{1}{4}x^2$.