§4. Золотое сечение и законы искусства

Отрезок можно разделить на две части бесконечным множеством способов. В частности, можно разделить так, чтобы *отношение всего отрезка к его большей части равнялось отношению большей части к меньшей*.

Рис. 1

Пусть длина отрезка AB равна a (рис. 1), длина его большей части AC равна x, тогда $a-x$ – длина меньшей части CB отрезка. Составим отношение согласно приведенному выше определению:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Такое деление отрезка и называется со времен древних греков *делением отрезка в крайнем и среднем отношении*.

Откуда

$$a(a-x) = x^2, \text{ или } x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Длина отрезка x выражается положительным числом, поэтому из двух корней $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4a^2}}{2}$ следует выбрать положительный: $x = \frac{-a+\sqrt{5a^2}}{2}$ или $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

Числа $\frac{x}{a} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\frac{a}{x} = \varphi^{-1} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ обозначаются обычно буквой «фи» в честь древнегреческого скульптора Фидия (начало V в. до н.э.), в творениях которого это число встречается многократно. Число φ иррациональное: $\varphi \approx 0{,}61803398 \ldots$ $\left(\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618\right)$. Но в практике пользуются числом φ, взятым с точностью или до тысячных $0{,}618$, или до сотых $0{,}61$, или до десятых $0{,}6$.

Примем длину отрезка AB за 1 и разделим его на 10 равных частей. Тогда для того, чтобы разделить его в среднем и крайнем отношении, придется отложить от одного из его концов шесть десятых долей данного отрезка. На рис. 1 $AC = 0{,}6$, тогда $CB = 0{,}4$, а точка C является искомым сечением (с точностью до $0{,}1$).

Деление отрезка в среднем и крайнем отношении часто использовалось в искусстве, встречается оно и в живой природе, что дало повод математику XVI в., другу известного художника Леонардо да Винчи монаху Луке Пачоли назвать такое деление отрезка божественной, великолепной пропорцией. По поводу этой пропорции он употреблял много хвалебных слов, но в истории утвердились два варианта: *золотая пропорция*, или *золотое сечение*.

Рассмотрим теперь применение золотого сечения в скульптурах Древней Греции. Работы Фидия в оригиналах почти не сохранились, поэтому для иллюстрации возьмем произведение его младшего современника, скульптора и теоретика искусства Поликлета (вторая половина V в. до н.э.). Теория пропорций Поликлета ярко воплотилась в статуе «Дорифор» – копьеносец, которую он изваял в строгом соответствии всех частей. В этой статуе мы встречаем много раз примененное число φ. Так, пупок (точка O) делит высоту статуи в отношении золотого сечения. Значит, если высоту AB принять за 1, то $AO = \varphi$, но тогда $OB = 1 - \varphi$. Однако на рис. 2 показано, что расстояние OB берется равным φ^2. Нет ли здесь противоречия?

Задача 1. Проверим справедливость равенства: $1 - \varphi = \varphi^2$.

Решение. Перенесем в одну сторону и запишем уравнение $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$. Откуда

$\varphi = \frac{-1+\sqrt{1+4}}{2}$, т.е. получили то же самое значение φ, которое вычислили ранее.

Проанализируем другие пропорции знаменитой статуи. Расстояние от подошвы копьеносца до его колена равно φ^3, высота шеи вместе с головой – φ^4, длина шеи до уха – φ^5, а расстояние от уха до макушки – φ^6. Таким образом, в этой статуе мы видим геометрическую прогрессию со знаменателем φ: φ, φ^2, φ^3, φ^4, φ^5, φ^6.

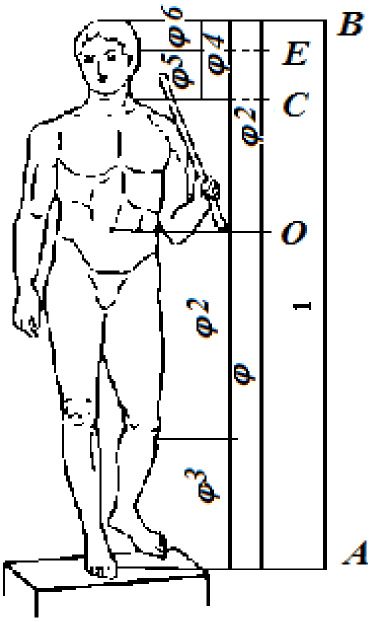

Рис. 2

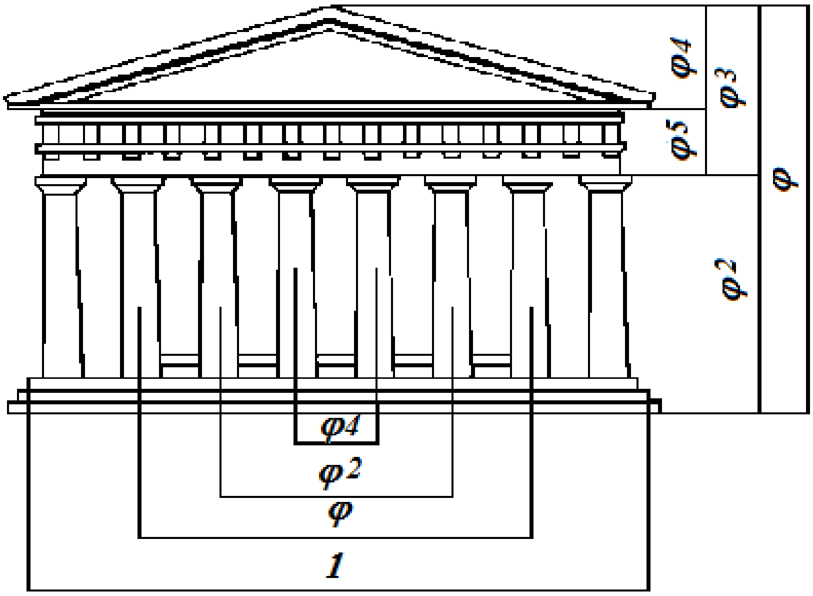

Рис. 3

Золотое сечение многократно встречается при анализе геометрических соразмерностей Парфенона (рис. 3). Это древнее сооружение с гармоническими пропорциями. Многие искусствоведы, стремившиеся раскрыть секрет эмоционального воздействия, которое это здание оказывает на зрителя, искали и находили в соотношениях его частей золотую пропорцию. Известен целый ряд пропорций. Так, приняв за 1 ширину торцевого фасада здания, можно получить геометрическую прогрессию, состоящую из восьми членов: расстояние между второй и седьмой колоннами равно φ, между третьей и шестой – φ^2, между четвертой и пятой – φ^4. Аналогичные закономерности мы видим и в построении здания по высоте. Объединив их, получим прогрессию: 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4, φ^5.

Здесь поучительно вспомнить о пропорциях человеческого тела, отмеченных ранее. Сравнивая рис. 3 и 2, видим, что отношение торцевой длины здания к его высоте равно отношению человеческого роста к длине нижней части тела (длина отрезка OA на рис.2): $1/\varphi$. Высота крыши Парфенона относится к расстоянию между крышей и капителями колонн как φ^4: φ^5, т.е. так же, как отрезок BC на рис. 2 относится к отрезку EC.

Эти совпадения не случайны. В своих архитектурных творениях древнегреческие мастера исходили из пропорций, которые видели в природе, и прежде всего в пропорциях человеческого тела.

А в вертикальных пропорциях храма Василия Блаженного прослеживается восемь членов геометрической прогрессии (рис. 4).

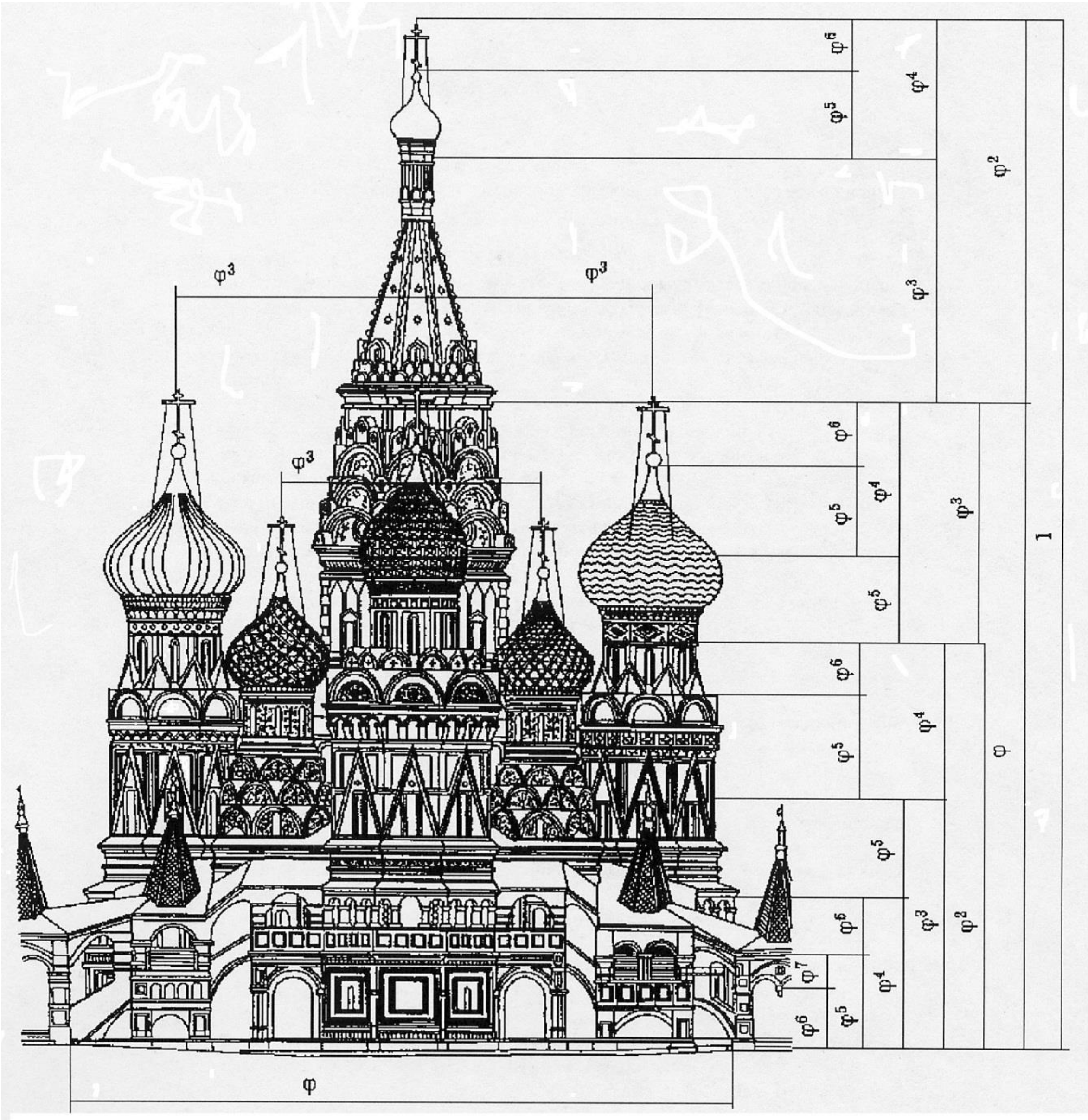

Рис. 4

Золотое сечение можно увидеть и в пентаграмме – так называют звездчатый пятиугольник (от слова «пенте» – пять). Он служил символом Пифагорейского союза.

Чем же интересен этот символ с точки зрения математики?

Интересно, что стороны пентаграммы, пересекаясь, образуют снова правильный пятиугольник, в котором пересечение диагоналей дает нам новую пентаграмму, а в пересечении ее сторон мы снова видим правильный пятиугольник, открывающий возможность построения новой пентаграммы. И так далее до бесконечности.

Пентаграмма представляет собой вместилище золотых пропорций. Но, прежде чем перейти к ним, напомним два *свойства* правильных n-угольников.

Первое. Величина угла правильного n-угольника вычисляется по формуле $\frac{180°(n-2)}{n}$. При $n = 5$ имеем $\frac{180°\cdot 3}{5} = 108°$.

Второе. Диагонали правильного n-угольника делят его углы на равные части. Например, в 5-угольнике $ABCDE$ на рис. 5, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 108°: 3 = 36°$ (как вписанные, опирающиеся на равные дуги).

Соединим в пентаграмме точки K и F. Выше уже отмечалось, что пятиугольник $KLFPM$ — правильный, т.е. $\angle KLF = 108°$. Тогда $\angle 1 = \angle 2 = 36°$. Но угол E тоже равен $36°$. Из того, что $\angle 1 = \angle E$ следует, что $EC || KF$, а тогда $\Delta BEP \sim \Delta BKF$ и $EB: KB = PB: FB$.

Обозначим $EB = a$ и $KB = x$, перепишем пропорцию иначе: $a: x = x: (a - x)$, или $x^2 + ax - a^2 = 0$. Таким образом, мы получили то же самое уравнение, решением которого является $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Об этом уравнении мы говорили в самом начале. Значит, $KB: EB = \varphi$.

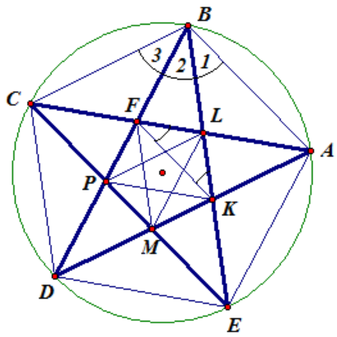

Рис. 5

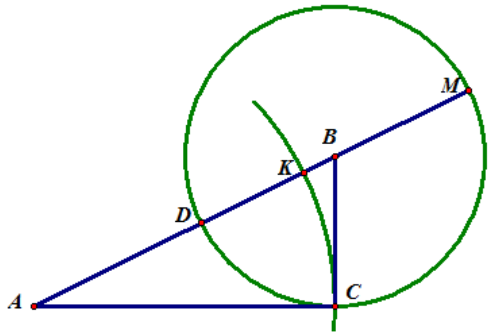

Рис. 6

Таким образом доказано, что *стороны пентаграммы, пересекаясь, делят друг друга на отрезки, длины которых образуют золотую пропорцию*.

В Древней Греции были выработаны способы точного построения золотого сечения, хотя иррациональные числа, которые ныне применяются для его выражения, древним были неизвестны. Но они установили, что величину, которая не поддается выражению целым числом или отношением целых чисел (т.е. дробью вида m/n), можно выразить... длиной отрезка. Поэтому для них были так важны приемы построения циркулем и линейкой, которые давали возможность найти геометрические аналоги того, что мы называем иррациональным числом.

Задача 2. Рассмотрим способ точного построения золотого сечения с помощью циркуля и линейки по данному прямоугольному треугольнику.

Решение. Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами $a = 1$ и $b = 2$. Тогда его гипотенуза $c = \sqrt{5}$. Построим отрезки, длины которых находятся в отношении φ.

Построение (рис. 6):

а) из точки B как из центра проведем окружность радиусом $a = 1$, которая пересечет гипотенузу AB в точке D, а ее продолжение – в точке M, тогда $AM = \sqrt{5} + 1$;

б) из точки A проведем окружность радиусом $b = 2$, которая пересечет отрезок AM в точке K, тогда $MK = MA - \text{AK} = (\sqrt{5} + 1) - 2 = \sqrt{5} - 1$ и $AK = AC = 2$.

В таком случае $MK: KA = (\sqrt{5} - 1): 2$.

Следовательно, точка K (как и точка D) делит отрезок AM в золотом отношении.

Число Ф интересно еще и тем, что оно является диагональю правильного 5-угольника со стороной 1. (Проверьте!) На этом свойстве основан способ построения правильного пятиугольника циркулем и линейкой.