Биссектриса

Биссектриса внутреннего угла треугольника – это отрезок прямой, заключенный внутри треугольника и делящий данный угол на две равные части.

Биссектриса обладает следующими важными *свойствами*:

1) биссектриса – есть *геометрическое место точек*[i], равноудаленных от сторон угла;

2) во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке O (рис. 1), являющейся центром окружности, *вписанной* в треугольник (т.е. касающейся всех его сторон);

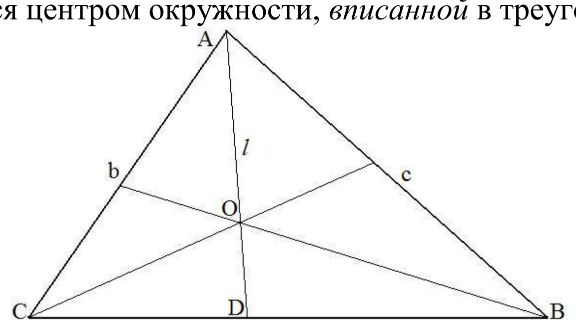

Рис. 1

3) биссектриса AD (рис. 1) любого угла A треугольника ABC делит противоположную сторону на части CD и BD, пропорциональные прилежащим сторонам AC и AB треугольника:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}.$$

Доказательство. Легко видеть, что площади треугольников ACD и ABD, имеющих общую вершину A, относятся как длины их оснований, т.е. $S_{ACD}\colon S_{ABD} = CD\colon BD$.

С другой стороны, эти площади относятся как длины сторон $b\colon c$ ($AC = b$, $AB = c$), поскольку $S_{ACD} = \frac{1}{2} bl \sin(\alpha/2)$, $S_{ABD} = \frac{1}{2} cl \sin(\alpha/2)$, где l – длина биссектрисы AD, а α – величина угла A и, следовательно, $S_{ACD}\colon S_{ABD} = b\colon c$. Из сравнения полученных пропорций и вытекает доказываемое утверждение;

4) *длина* l биссектрисы AD (рис. 1) угла A треугольника ABC, равного α, заключенного между сторонами AC и AB, определяется по формуле:

$$l = \frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} = \frac{2\cos\alpha/2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Доказательство. Запишем площадь треугольника ABC двумя различными способами – один раз через стороны AC, AB и угол α, заключенный между ними, другой раз – через сумму площадей треугольников ACD и ABD:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bl\sin\alpha\,;$$

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} = \frac{1}{2} bl\sin\alpha/2 + \frac{1}{2} cl\sin\alpha/2.$$

Приравнивая эти выражения друг другу, получаем:

$$bc\sin\alpha = (b+c)l\sin\alpha/2,$$

или

$$2bc\sin\alpha/2\cos\alpha/2 = (b+c)l\sin\alpha/2,$$

откуда и следует указанная выше формула для вычисления длины биссектрисы.

Свойство биссектрисы внешнего угла треугольника: биссектриса BF внешнего угла треугольника (рис. 2), смежного с углом B, при $AB \neq BC$ пересекает продолжение противоположной стороны AC в такой точке F, что

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC};$$

в случае $AB = BC$ биссектриса внешнего угла параллельна основанию.

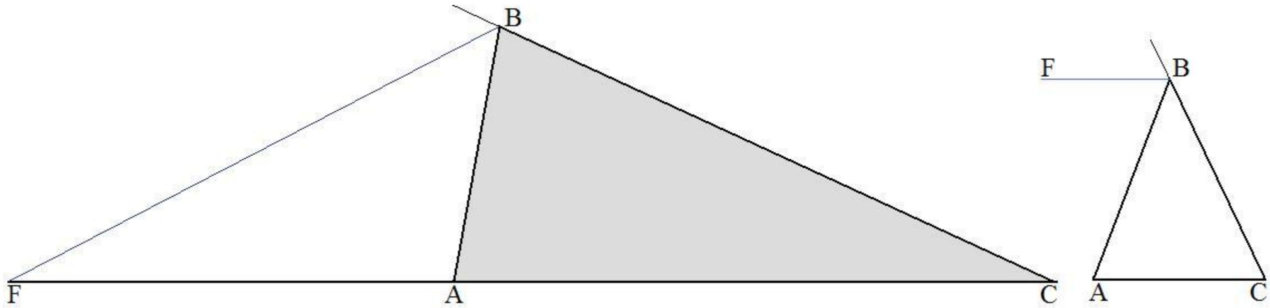

Рис. 2

При использовании следующих формул длины биссектрисы также необходимо рядом приводить их вывод (проделайте это самостоятельно):

А) $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$, где a_b, a_c – части стороны а, на которые ее делит биссектриса угла A;

Б) $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника.

Теорема Штейнера-Лемуса. *Любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух углов (измеряемые от вершины до противоположной стороны), является равнобедренным*[ii].

А вот следующая забавная вариация на ту же тему почти неизвестна даже среди любителей геометрии.

Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?

Оказывается, утверждать это, вообще говоря, нельзя![iii].

Задача 1. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и $AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение. Искомая площадь будет равна $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin AEB$.

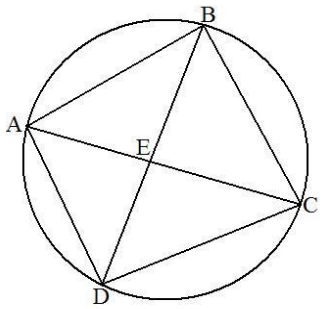

Рис. 3

1) Из условия $AD \cdot CE = DC \cdot AE$ имеем $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}$. Таким образом в треугольнике ADC отрезок DE делит противоположную сторону AC на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, DE – биссектриса в треугольнике ADC.

2) Тогда $\angle ADC = 2\angle ADB = \frac{\pi}{4}$ и по теореме синусов $AC = 2R \sin\frac{\pi}{4}$, R – радиус описанной окружности треугольника ADC, т.е. данной окружности.

3) Треугольник ABE подобен треугольнику DBA по двум углам, тогда $\angle AEB = \angle DAB$ и $\sin AEB = \sin DAB = \frac{BD}{2R}$ (по теореме синусов).

Искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin AEB = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin\frac{\pi}{4} \cdot BD \cdot \frac{BD}{2R} = \frac{1}{2} BD^2 \sin\frac{\pi}{4} = 9\sqrt{2}.$$

Ответ. $9\sqrt{2}$.

Задача 2. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку C, параллельна BD. Известно, что $AB\colon BE = 3\colon 1$ и $S_{ADC} = 18$. Найдите площадь треугольника CDE.

Ответ. 2.

Задача 3. В треугольнике ABC сторона AB равна 21, биссектриса BD равна $8\sqrt{7}$, а отрезок DC равен 8. Найти периметр треугольника ABC.

Ответ. 60.

Задача 4. Точка O лежит на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $OC = OD$ и точка O одинаково удалена от прямых DA, AB и BC. Найти углы четырехугольника, если $\angle AOB = 110°$ и $\angle COD = 90°$.

Ответ. $50°, 90°, 110°, 110°$.

Задача 5. В треугольнике ABC проведены высота AH длины h, медиана AM длины l и биссектриса AN. Точка N – середин отрезка MH. Найти расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Решение.

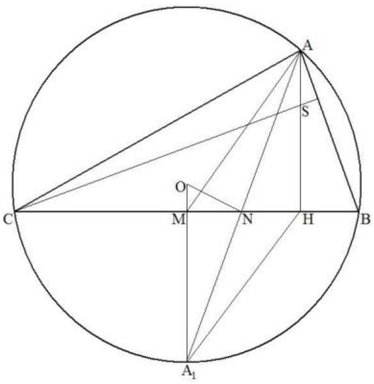

Рис. 4

Во многих задачах, связанных с биссектрисой треугольника, бывает полезно продолжить эту биссектрису до пересечения с описанной окружностью в середине дуги, на которую опирается рассматриваемый угол.
Тогда на рисунке хорошо будет видно, как именно друг относительно друга будут расположены биссектриса, медиана и высота.
На рис. 4 точка A_1 – середина дуги CB.

При этом радиус OA_1 проходит через точку M и $OA_1 \perp CB$, тогда $MAHA_1$ – параллелограмм ($MN = NH$ по условию), значит $AN = NA_1$, следовательно $ON \perp AA_1$ и $\Delta ONA_1 \sim \Delta NHA$ (по двум углам при вершинах A и A_1).

Пусть S – точка пересечения высот ABC, $AS = x$, $OC = OA_1 = R$, $MN = MH = y$, $AN = NA_1 = d$, $BC = a$.

1) ΔMAH : $l^2 - h^2 = 4y^2$;

2) ΔNAH : $d^2 - h^2 = y^2$;

3) $\Delta ONA_1 \sim \Delta NHA$: $\dfrac{d}{R} = \dfrac{h}{d} \Rightarrow Rh = \dfrac{3h^2 + l^2}{4}$;

4) ΔCOM : $\dfrac{a^2}{4} = R^2 - (R-h)^2$;

5) $\Delta CSH \sim \Delta ABH$: $\Rightarrow \dfrac{SH}{CH} = \dfrac{HB}{AH} \Rightarrow \dfrac{h-x}{a/2+2y} = \dfrac{a/2-2y}{h} \Rightarrow x = h - \dfrac{a^2/4 - y^2}{h}$.

Ответ. $\frac{l^2-h^2}{2h}$.

Задача 6. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найти AD.

Ответ. $c\sqrt{2 + \frac{c}{d}}$.

Задача 7. В треугольнике ABC дано: $AB = c$, $AC = b$ ($b > c$), AD – биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найти AE.

Ответ. $\frac{2bc}{b+c}$.

Задача 8. В треугольнике KLM радиус окружности равен R, угол K равен α, точка O – центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около треугольника KLM, в точке N. Найти ON.

Ответ. $2R \sin \alpha/2$.

Задача 9. Доказать, что биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.

Задача 10. Через основания биссектрис треугольника ABC проведена окружность. Рассмотрим три хорды, образованные при пересечении сторон треугольника с этой окружностью. Доказать, что длина одной из этих хорд равна сумме длин двух других.

---

[i] **Геометрическим местом точек** называется такое множество, которое содержит все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им.

[ii] Эта теорема была послана шведскому геометру Якобу Штейнеру в 1840 году С.Л. Лемусом с просьбой дать чисто геометрическое доказательство. Штейнер дал довольно сложное доказательство, которое вдохновило многих других на поиск более простых методов.

[iii] Подробное решение этой задачи дается в книге И.Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М., Наука, 1982), с. 157.