§5. Золотая пропорция и связанные с ней отношения

Золотым треугольником будем называть равнобедренный треугольник, отношение основания которого к боковой стороне равно φ. Одним из таких треугольников является треугольник с боковой стороной Φ и основанием 1; именно его мы в дальнейшем будем называть золотым.

Нетрудно определить углы золотого треугольника. Для этого в треугольнике ABC (рис. 1) выберем на стороне AC точку D так, чтобы $BD = 1$ (такую точку легко построить, проведя окружность с центром в точке B и радиусом BA). Из подобия треугольников ABC и ADB получаем:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow \frac{\Phi}{1} = \frac{1}{DA},$$

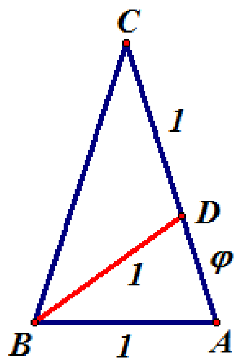

Рис. 1

откуда $DA = \frac{1}{\Phi} = \varphi$.

Поскольку $BC = AC = \Phi$, $DA = \varphi$, то, учитывая равенство $\Phi = \varphi + 1$, получаем, что $CD = 1$ и треугольник CBD равнобедренный и BD — биссектриса треугольника ABC. Теперь легко найти углы треугольника ABC: $\angle B = \angle A$, т.к. треугольник равнобедренный, $\angle ABD = \angle CBD$, т.к. BD – биссектриса, $\angle CBD = \angle DCB$, т.к. треугольник CDB – равнобедренный, т.е.

$$\angle ABD = \angle CBD = \angle DCB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{180°}{5} = 36°, \qquad \angle A = \angle B = 72°.$$

Так как далее нам неоднократно придется работать с выражениями, содержащими $\sin 18°$ и $\cos 18°$, поэтому вычислим заранее их значения через Φ:

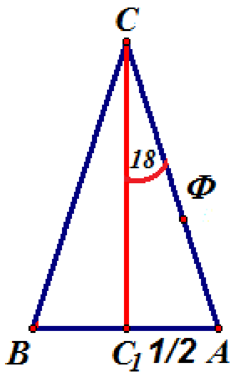

Рис. 2

$$\sin 18° = \frac{AC_1}{AC} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\Phi - 1}{2};$$

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \sqrt{1 - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16}} = \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2}.$$

Задача 1. Доказать, что биссектрисы при основании золотого треугольника равны основанию и отсекают от боковых сторон отрезки равные 1 и φ, считая от вершины.

Решение этой задачи изложено выше.

Задача 2. Найти радиус R описанной и радиус r вписанной окружностей золотого треугольника. Доказать, что $R \cdot r = \sin 18°$.

Решение. Из треугольника COE (рис. 3) имеем:

$$R = \frac{\Phi}{2\cos 18°} = \frac{2\Phi}{2\sqrt{2+\Phi}} = \frac{\Phi}{\sqrt{2+\Phi}}.$$

Из треугольника CEG (рис. 4): $CG = \frac{r}{\sin 18°}$.

Из треугольника CC_1A: $\frac{CC_1}{C_1A} = ctg18°$, $2\left(r + \frac{r}{\sin 18°}\right) = ctg18°$, $2r(\sin 18° + 1) = \cos 18°$,

$$r = \frac{\cos 18°}{2\sin 18° + 2}.$$

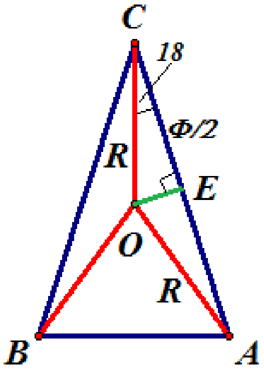

Рис. 3

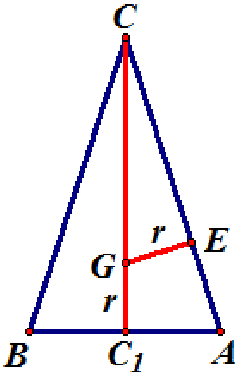

Рис. 4

Подставляя сюда значения $\sin 18°$ и $\cos 18°$, выраженные через Ф, получим:

$$r = \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2(\Phi+1)} = \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2\Phi^2}.$$

Перемножим R и r:

$$R \cdot r = \frac{\Phi}{\sqrt{2+\Phi}} \cdot \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2\Phi^2} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{\varphi}{2} = \sin 18°.$$

Ответ: $R = \frac{\Phi}{\sqrt{2+\Phi}}$, $r = \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2\Phi^2}$.

Задача 3. Диагональ параллелограмма разбивает его на два золотых треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

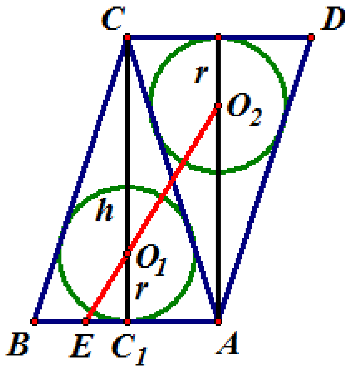

Рис. 5

Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм; O_1, O_2 – центры окружностей, E — точка пересечения прямой O_1O_2 с отрезком AB, C_1 — середина AB (рис. 5). Далее, пусть $O_1C_1 = r$, $CC_1 = h$. Из подобия треугольников O_2AE и O_1C_1E заключаем, что

$$\frac{O_1E}{O_1O_2} = \frac{EC_1}{C_1A}.$$

Используя подобие этих же треугольников, можно выразить длину EC_1 через h и r:

$$\frac{EA}{EC_1} = \frac{AO_2}{C_1O_1}, \frac{EC_1 + \frac{1}{2}}{EC_1} = \frac{h-r}{r}, 1 + \frac{1}{2EC_1} = \frac{h}{r} - 1, \frac{1}{2EC_1} = \frac{h-2r}{r}, EC_1 = \frac{r}{2h-4r}.$$

Значения для h и r:

$$h = \frac{\Phi\sqrt{2+\Phi}}{2}, r = \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2\Phi^2}.$$

Получим:

$$EC_1 = \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2\Phi^2} \cdot \frac{\Phi^2}{\sqrt{2+\Phi} \cdot (\Phi^3 - 2)} = \frac{1}{2(\Phi^3 - 2)}.$$

Преобразовывая данное выражение с помощью соотношения $1 + \Phi = \Phi^2$, будем иметь окончательно: $EC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\Phi - 1}$.

Из прямоугольного треугольника EO_1C_1 найдем O_1E:

$$O_1E = \sqrt{EC_1^2 + O_1C_1^2} = \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{2+\Phi}{4\Phi^4}} = \frac{\sqrt{3+2\Phi}}{\sqrt{5}\Phi^2}.$$

Теперь в пропорции $\frac{O_1E}{O_1O_2} = \frac{EC_1}{C_1A}$ нам известны все члены, кроме O_1O_2. Выразим длину искомого отрезка:

$$O_1O_2 = \frac{O_1E \cdot C_1A}{EC_1} = \frac{\sqrt{3+2\Phi}}{\sqrt{5}(1+\Phi)}(2\Phi - 1).$$

Ответ. $O_1O_2 = \frac{\sqrt{3+2\Phi}}{\sqrt{5}(1+\Phi)}(2\Phi - 1)$..