§3. Пропорциональные отрезки

Задачи данной темы довольно часто встречаются на вступительных экзаменах и, чтобы избежать использования (без доказательства) теорем Чевы и Менелая при их решении, удобно, например, рассмотреть полезную задачу и метод ее решения, который пригодится при решении не только планиметрических, но и стереометрических задач.

Основная задача.

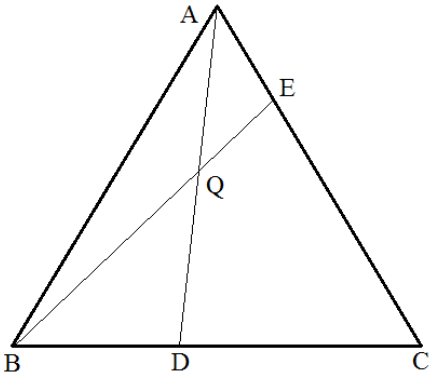

Рис. 1

В треугольнике ABC (рис. 1) из вершин A и B к сторонам BC и AC, соответственно, проведены отрезки AD и BE, делящие эти стороны в заданном отношении, т.е.

$$\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n},\ \frac{AE}{EC}=\frac{p}{q}. \qquad (1)$$

Определить, в каком отношении делятся эти отрезки точкой их пересечения, т.е. найти отношения:

$$\frac{AQ}{QD} \text{ и } \frac{BQ}{QE}.$$

Иными словами, известно, в каком отношении отрезки AD и BE делят противоположные вершинам A и B стороны треугольника; требуется определить, в каком отношении они делятся между собой.

Оказывается, что эти отношения не зависят ни от вида треугольника, ни от его сторон, ни от его углов, а определяются лишь отношениями, в которых делятся соответствующие стороны треугольника точками D и E, т.е. пропорциями (1).

Решение. Найдем сначала первое из искомых отношений. Для этого выполним одно вспомогательное построение и несколько стандартных шагов, характерных при решении задач подобного типа.

1) Проведем прямую $AB'||BC$ (рис. 2) и обозначим длину отрезка AB' через a, т.е. $AB'=a$.
2) Рассмотрим подобные треугольники AEB' и CEB (рис. 3), причем коэффициент подобия равен $\frac{AE}{EC}=\frac{p}{p}$, тогда $\frac{AB'}{BC}=\frac{AE}{EC}=\frac{p}{q}$ и $BC=\frac{q}{p}a$.

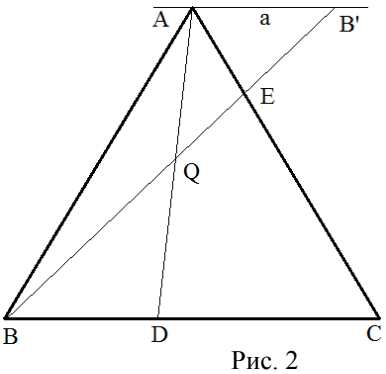

Рис. 2

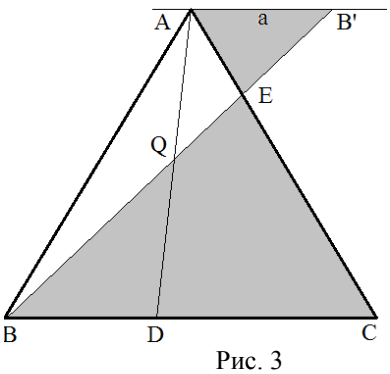

Рис. 3

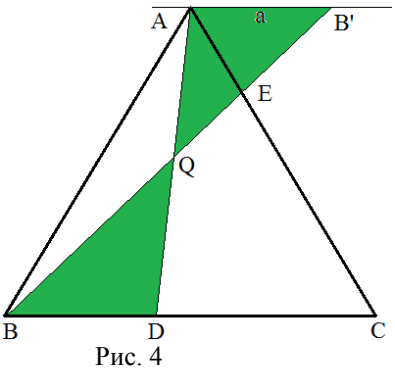

Рис. 4

3) Используя затем первую из пропорций (1), находим:

$$BD=\frac{m}{m+n}BC$$

или

$$BD=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{q}{p}\cdot a.$$

4) Из подобия треугольников $AB'Q$ и DQB (рис. 4) находим:

$$\frac{AQ}{QD} = \frac{AB'}{BD} = \frac{a}{\frac{m}{m+n}\frac{q}{p}a} = \frac{p}{q}\left(1+\frac{n}{m}\right).$$

Таким образом, $\frac{AQ}{QD} = \frac{p}{q}\left(1+\frac{n}{m}\right)$

Аналогично находится отношение $\frac{BQ}{QE} = \frac{m}{n}\left(1+\frac{q}{p}\right)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. В треугольнике ABC длины сторон AB, BC и AC относятся как $2:4:5$, соответственно. Найти, в каком отношении делятся биссектрисы внутренних углов треугольника точкой Q их пересечения.

Решение.

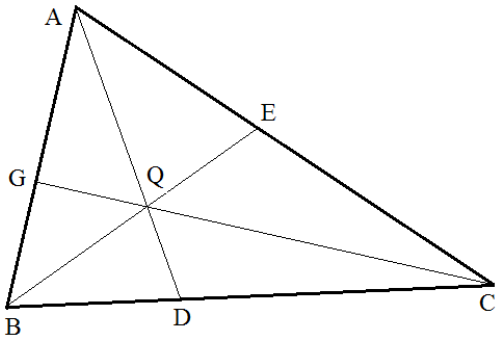

Рис. 5

Используя свойство биссектрисы делить противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные заключающим ее сторонам, находим (рис. 5):

$$\frac{AE}{EC} = \frac{2}{4}; \frac{BD}{DC} = \frac{2}{5}; \frac{AG}{GB} = \frac{5}{4}.$$

Используя затем результаты решения основной задачи, получаем

Ответ: $\frac{BQ}{QE} = \frac{6}{5}$, $\frac{AQ}{QD} = \frac{7}{4}$, $\frac{CQ}{QG} = \frac{9}{2}$.

Рассмотрим теперь решение задачи, которую можно назвать обратной по отношению к рассмотренной выше. Основной ее вопрос можно сформулировать следующим образом: найти, в каком отношении отрезки AD и BE, проведенные из вершин A и B треугольника ABC к сторонам BC и AC, соответственно, делят эти стороны, если известно, в каком отношении отрезки AD и BE делятся между собой?

Обратная задача. В треугольнике ABC проведены отрезки AD и BE, пересекающиеся в точке Q (рис. 1) так что известны отношения:

$$\frac{AQ}{QD} = a, \frac{BQ}{QE} = b.$$

Найти, в каком отношении делятся стороны AC и BC точками E и D, т.е. найти отношения:

$$\frac{AE}{EC} \text{ и } \frac{BD}{DC}.$$

Решение. Воспользуемся результатами решения основной задачи. Обозначим искомые отношения через p/q и m/n, соответственно. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{p}{q}\left(1+\frac{m}{n}\right) = a \\ \frac{m}{n}\left(1+\frac{q}{p}\right) = b \end{cases}.$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} 1+\frac{m}{n} = a\frac{1}{p/q} \\ 1+\frac{q}{p} = b\frac{1}{m/n} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a\frac{1}{p/q} - \frac{1}{m/n} = 1 \\ -\frac{1}{p/q} + b\frac{1}{m/n} = 1 \end{cases}.$$

Отсюда легко находятся искомые отношения, а именно:

$$\frac{p}{q} = \frac{ab-1}{1+b}, \frac{m}{n} = \frac{ab-1}{1+a}.$$

Очевидно, что решение обратной задачи существует при условии $ab > 1$.

Также в данной теме при решении задач бывает полезно использовать некоторые *свойства площади*.

1) На стороне BC треугольника ABC выбрана некоторым образом точка D, тогда $\frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{BD}{DC}$ (рис. 6).

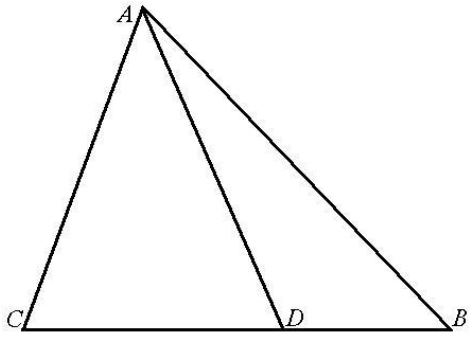

Рис. 6

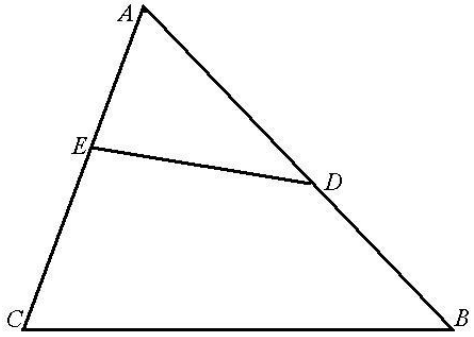

Рис. 7

2) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны некоторым образом точки D и E соответственно, тогда $\frac{[ADE]}{[ABC]} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}$ (рис. 7).

Задача 2. В треугольнике ABC $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 8$. На отрезке AB взята точка K так, что $AK : KB = 2 : 3$, а на стороне BC – точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$. На отрезке KM взята точка O так, что $KO : OM = 4 : 5$. Площадь какого из треугольников ABO, BCO или ACO является наименьшей?

Решение.

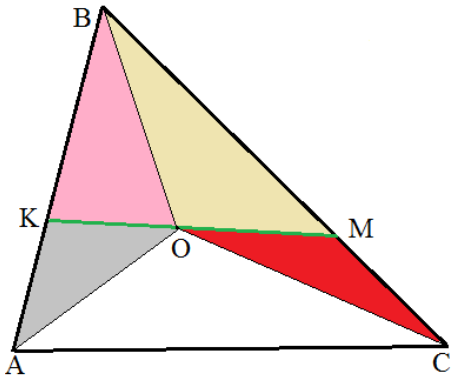

Рис. 8

1) Пусть $[AKO] = s$, тогда по свойству площадей (одинаковые высоты, различные основания) имеем:
$\frac{[BKO]}{[AKO]} = \frac{3}{2}$, тогда $[BKO] = \frac{3}{2}s$;
$\frac{[BKO]}{[BOM]} = \frac{4}{5}$, тогда $[BOM] = \frac{5}{4}[BKO] = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}s = \frac{15}{8}s$;
$\frac{[BOM]}{[OMC]} = \frac{2}{1}$, тогда $[\mathrm{OMC}] = \frac{1}{2}[BOM] = \frac{1}{2}\,\frac{15}{8}s = \frac{15}{16}s$.

2) Тогда

$$[AOB] = s + \frac{3}{2}s = \frac{5}{2}s = \frac{40}{16}s$$
$$[BOC] = \frac{15}{8}s + \frac{15}{16}s = \frac{45}{16}s$$

3) А также $[KBM] = \frac{27}{8}s$, с другой стороны $[KBM] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot [ABC]$, т.е. $[ABC] = \frac{5}{2} \cdot \frac{27}{8}s$.

4) Тогда $[AOC] = [ABC] - [AOB] - [BOC] = \frac{50}{16}s$.

Ответ. ABO.