§2. Элементарная теория чисел.

Наибольший общий делитель целых чисел m и n — это наибольшее натуральное число, на которое делятся числа m и n. Он обозначается как НОД(m, n).

НОД$(24, 30) = 6$, НОД$(-15, 33) = 3$, НОД$(24, 11) = 1$, НОД$(1, 30) = 1$, НОД$(14, 24, 6) = 2$.

Утверждение. 1) Для любого натурального числа k верно равенство НОД$(km, kn) = k \cdot$ НОД(m, n).

2) Верны равенства НОД$(m, n) =$ НОД(n, m); НОД$(m, n) =$ НОД$(m - n, n)$.

Подумайте, почему это утверждение верно.

С помощью утверждения 1 найдем НОД$(120, 324)$.

$$\text{НОД}(120, 324) = \text{НОД}(120, 324 - 120) = \text{НОД}(120, 204) = \text{НОД}(4 \cdot 30, 4 \cdot 51) =$$
$$= 4\,\text{НОД}(30, 51) = 12\,\text{НОД}(10, 17) = 12.$$

Это можно было сделать быстрее, разложив числа 120 и 324 на множители ($324 = 18^2$). А в следующем примере проще воспользоваться утверждением 1.

$$\text{НОД}(1513, 1691) = \text{НОД}(1513, 178) = \text{НОД}(1335, 178) = \text{НОД}(1157, 178) =$$
$$= \text{НОД}(979, 178) = \text{НОД}(801, 178) = \text{НОД}(623, 178) = \text{НОД}(445, 178) = \text{НОД}(267, 178) =$$
$$= \text{НОД}(89, 178) = \text{НОД}(89, 89) = 89.$$

Здесь можно было сразу вычесть из 1513 число 178, умноженное, например, на 5 (проще поделить его на 2 и умножить на 10).

Числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1. Например, числа 15 и 32 взаимно просты, а числа 15 и 24 не являются взаимно простыми, так как НОД$(15, 24) = 3$.

Задача 1. При каких целых n дробь $\frac{2n+3}{3n-5}$ сократима?

Решение. То, что дробь сократима, означает, что НОД$(2n + 3, 3n - 5) > 1$. Воспользуемся утверждением 1:

$$\text{НОД}(2n + 3, 3n - 5) = \text{НОД}(2n + 3, 3n - 5 - 2n - 3) = \text{НОД}(2n + 3, n - 8) =$$
$$= \text{НОД}(2n+3-n+8, n-8) = \text{НОД}(n+11, n-8) = \text{НОД}(n+11-n+8, n-8) = \text{НОД}(19, n-8).$$

Раз НОД$(19, n - 8) > 1$, то он равен 19. То есть нам надо найти такие n, чтобы $n - 8$ делилось на 19. То есть, $n = 19k + 8$, где k — любое целое число.

Ответ: $n = 19k + 8$, где k — любое целое число.

Наименьшее общее кратное целых чисел m и n — это наименьшее натуральное число, которое делится на m и n. Оно обозначается как НОК(m, n).

НОК$(24, -30) = 120$, НОК$(5, 30) = 30$, НОК$(4, 5, 6) = 60$.

Уравнение $ax + by = c$, где a, b, c — целые числа (причем a и b не равны нулю одновременно), а x и y — неизвестные, называется линейным диофантовым уравнением первого порядка.

Теорема. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на НОД(a, b).

Например, уравнение $2x + 4y = 3$ не имеет решений, а уравнение $2x + 4y = 6$ имеет решение (бесконечно много решений).

Задача 2. Решить уравнение $4m = 3n + 1$ в целых числах.

Решение. Уравнение имеет решение (НОД$(4,3)=1$). Возможны 3 случая: либо m делится на 3, либо $m+1$ делится на 3, либо $m-1$ делится на 3.

a) Если m делится на 3, то m можно представить в виде $m=3k$, k — целое число. Подставим $m=3k$ в уравнение $4m=3n+1$, получим $12k=3n+1$, то есть $3(4k-n)=1$. Это невозможно, так как $4k-n$ — целое.

b) Если $m+1$ делится на 3, то a можно представить в виде $m=3k-1$, k — целое число. Подставим $m=3k-1$ в уравнение $4m=3n+1$, получим $12k-4=3n+1$, то есть $3(4k-n)=5$. Это невозможно, так как $4k-n$ — целое.

c) Если $m-1$ делится на 3, то a можно представить в виде $m=3k+1$, k — целое число. Подставим $m=3k+1$ в уравнение $4m=3n+1$, получим $12k+4=3n+1$, то есть $12k+3=3n$. Следовательно, $n=4k+1$.

Ответ: $m=3k+1$, $n=4k+1$, где k — любое целое число.

Задача 3. Найти самое маленькое натуральное число, которое дает остаток 1 при делении на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6, и делится на 7.

Решение. Обозначим число за x. Оно дает остаток 1 при делении на 2, то есть существует натуральное число l, такое что $x-1=2l$. Аналогично, существуют натуральные числа m, n, p, q, k, что $x-1=3m$, $x-1=4n$, $x-1=5p$, $x-1=6q$, $x=7k$.

Уравнения $x-1=2l$ и $x-1=3m$ следуют из уравнения $x-1=6q$, поэтому их можно выкинуть (т.е. то, что $x-1$ делится на 2 и на 3 следует из того, что оно делится на 6). Остались:

$$\begin{cases} x-1=4n \\ x-1=5p \\ x-1=6q \\ x=7k \end{cases}$$

Приравняв первые три, получим $4n=5p=6q$. Минимальное число, которое делится на 4, на 5 и на 6 — это наименьшее общее кратное НОК$(4,5,6)=4\cdot5\cdot3=60$. То есть $x-1=60s$, s — натуральное число. Это равенство эквивалентно первым трем. Получаем

$$\begin{cases} x=60s+1 \\ x=7k \end{cases},$$

то есть осталось решить уравнение $7k=60s+1$. Нам нужно найти самое маленькое число. Найдем его подбором, подставляя вместо s натуральные числа, так чтобы $60s+1$ делилось на 7. Достаточно перебрать числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (подумайте, почему). Итак, 61, 121, 181, 241 не делятся на 7, а 301 делится.

Ответ: 301.

Число a называется **рациональным**, если существуют такие целые числа m и n, $n>0$, что $a=\frac{m}{n}$. Целые числа являются рациональными (можно взять $n=1$).

Задача 4. Доказать, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Решение. Предположим, что $\sqrt{2}$ — рациональное. Тогда существуют такие целые числа m и n, $n>0$, что $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$. Если числа m и n имеют общие делители, то сократим дробь. То есть $m=m_1d$, $n=n_1d$, где $d=$ НОД(m,n). Таким образом, $\sqrt{2}=\frac{m_1}{n_1}$, НОД$(m_1,n_1)=1$.

Возведем обе части равенства $\sqrt{2}=\frac{m_1}{n_1}$ в квадрат: $2=\frac{m_1^2}{n_1^2}$, то есть $2n_1^2=m_1^2$. Следовательно, m_1^2 — четное, то есть $m_1=2k$, k — целое (если бы $m_1=2k+1$, то $m_1^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ — нечетное).

Итак, имеем: $2n_1^2=4k^2$, то есть $n_1^2=2k^2$. Следовательно, n_1^2 делится на 2, то есть n_1 делится на 2. Но и m_1 делится на 2, то есть НОД$(m_1,n_1)\neq1$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.