

## §1. Элементарная теория чисел.

### Задачи.

Все задачи выполняются без калькулятора.

1. В числе  $12*456789$  одна цифра заменена на \*. Перечислить все цифры, какие можно поставить вместо \* так, чтобы число  $12*456789$  делилось на 3;
2. Доказать признак делимости на 9: натуральное число  $a$  делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа  $a$  делится на 9;
3. Может ли натуральное число, сумма цифр которого равна 30, быть квадратом какого-нибудь натурального числа?
4. Доказать признак делимости на 4: число  $a$  делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4;
5. Доказать, что следующие числа являются составными:

$$\begin{aligned} &18273627, \\ &n^3 - 8, \quad n - \text{целое,} \\ &2^{13} - 12^5, \\ &1661, \\ &5757, \\ &575757. \end{aligned}$$

6. Доказать признак деления на 11: натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр, занимающих нечетные позиции, и суммой цифр, занимающих четные позиции делится на 11. (Например,  $10864194 = 11 \cdot 987654$ ;  $10864194 = 0 + 6 + 1 + 4 - (1 + 8 + 4 + 9) = 11 - 22 = -11 = 11 \cdot (-1)$ ).
7. Делится ли число  $5432112345$  на 11?
8. Доказать, что произведение четырех последовательных чисел делится на 24.
9. Делится ли сумма цифр чисел  $1, 2, \dots, 100$  на 3, 9, 4, 8?

*Ответы к задачам.* (1) 0, 3, 6, 9; (3) нет, не может, так как по признаку делимости на 3, оно делится на 3, но не делится на 9 по признаку делимости на 9; (5) 18273627 делится на 3 (так как  $1 + 8 + 2 + 7 + 3 + 6 + 2 + 7 = 36 = 3 * 12$ );  $n^3 - 8 = (n - 2)(n^2 + 2n + 4)$ ; четное;  $1661 = 11 * 151$ ;  $5757 = 101 * 57$ ;  $575757 = 10101 * 57$ ; (7) да, так как  $5 + 3 + 1 + 2 + 4 - (4 + 2 + 1 + 3 + 5) = 0$  (признак делимости на 11); (8) обозначаем числа, например за  $n - 1, n, n + 1, n + 2$  и доказываем как в задаче 2 из урока; (9) нет, нет, нет, нет.