Лекция 8

Глава 7. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

На границе жидкости с газом или твердым телом её молекулы находятся в физически иных условиях, нежели частицы внутри. Это наделяет поверхностный слой жидкости особыми свойствами, характеризующимися её так называемым поверхностным натяжением.

§ 7.1. Молекулярная картина поверхностного слоя

Рассмотрим поверхность жидкости, граничащую со своим насыщенным паром. При температурах, далеких от критической, плотность пара на несколько порядков меньше плотности жидкости и его с достаточно хорошим приближением можно вовсе не учитывать. Будем считать, что силы притяжения между частицами простираются на 4—5 характерных размеров молекулы r_0, силы же отталкивания, как более короткодействующие, — на расстояния, близкие к r_0. Другими словами, каждая молекула притягивается всеми частицами, расположенными ближе $5r_0$, и отталкивается лишь своими ближайшими «соседками». Для молекулы на глубине, очевидно, в среднем обе суммы сил (порознь) равны нулю. При приближении к поверхности, однако, ситуация меняется и баланс сил усложняется.

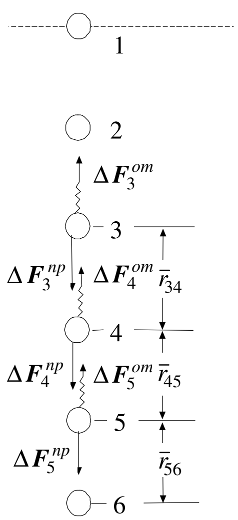


Рис. 1

На рис. 1 схематично изображена вертикальная цепочка молекул поверхностного слоя жидкости. Конечно, частицы совершают тепловое движение, меняются местами с окружающими молекулами, столбец этот не вертикален, все время «извивается», так что это — довольно грубая модель, соответствующая некой картине в среднем. Будем идти по этой цепочке снизу вверх.

Начиная приблизительно с пятой молекулы, частицы «почувствуют» приближение границы: вниз пятую молекулу будут тянуть пять частиц (остальные — вне радиуса действия сил притяжения), а вверх — только четыре. Это приведет к появлению некой избыточной силы притяжения $\Delta F_5^{пр}$, действующей вниз. Поскольку молекула 5 находится в равновесии (в среднем), сила эта должна быть скомпенсирована силами отталкивания. Но отталкивают молекулу 5 лишь две ближайшие частицы — четвертая и шестая. Значит, шестая должна отталкивать сильнее, т. е. находится ближе, чем четвертая, чтобы результирующая $\Delta F_5^{от}$ была направлена вверх (рис. 1). Стало быть, $\bar{r}_{56} < \bar{r}_{45}$. На молекулу 4 действует вниз ещё бóльшая избыточная сила притяжения $\Delta F_4^{пр}$ (вниз тянет по-прежнему пять, а вверх уже только три частицы), и для её компенсации должно быть $\bar{r}_{45} < \bar{r}_{34}$, чтобы пятая толкала сильнее, чем третья, и т. д. Находящиеся справа и слева от выделенного аналогичные столбики молекул, воздействуя на рассматриваемые частицы, хотя несколько и изменят возникающие избыточные силы $\Delta\boldsymbol{F}^{пр}$ и $\Delta\boldsymbol{F}^{от}$, но направления их и соотношения между ними, очевидно, останутся теми же.

Таким образом, средние расстояния $\bar{r}_{пов}$ между молекулами в поверхностном слое жидкости оказываются больше, чем средние расстояния $\bar{r}_{глуб}$ между ними на глубине. Поверхностный слой оказывается как бы растянутым; возникает, как говорят, поверхностное натяжение. Посмотрим, к чему приводит этот эффект.

§ 7.2. Избыточная поверхностная энергия

При увеличении поверхности жидкости часть её молекул переходит из глубины в поверхностный слой. Средние расстояния между молекулами этой части возрастают, и силы их взаимного притяжения совершают отрицательную работу. Это значит, что частицы жидкости, находящиеся в поверхностном слое (толщиной в несколько молекул), обладают некоторой избыточной потенциальной энергией по сравнению с частицами на глубине. Очевидно, что эта поверхностная энергия $U^{пов}$ пропорциональна площади поверхности жидкости S:

$$U^{пов} = \sigma S, \qquad (1)$$

где константа σ называется коэффициентом поверхностного натяжения жидкости и представляет собой избыточную поверхностную энергию, отнесенную к единице площади поверхности. Если поверхность жидкости неоднородна (такие случаи возможны), то под σ следует понимать

$$\sigma = \frac{dU^{пов}}{dS}, \qquad (2)$$

где $dU^{пов}$ — поверхностная энергия малого участка поверхности в окрестности данной точки, а dS — его площадь. Измеряется σ, очевидно, в Дж/м^2.

Наличие избыточной поверхностной энергии приводит к тому, что жидкость стремится принять такую форму, при которой эта энергия минимальна. В отсутствие внешних сил — это форма шара, в случае же их наличия устойчивое положение равновесия системы определяется минимумом суммарной потенциальной энергии, включающей и энергию взаимодействия с внешними телами.

С ростом температуры плотности жидкости и её пара сближаются, условия на поверхности и в глубине жидкости различаются все меньше и меньше и поверхностная энергия, а с ней и σ, уменьшаются. При критической температуре, очевидно, $\sigma = 0$.

§ 7.3. Силы поверхностного натяжения

Тенденция поверхности жидкости уменьшить свою площадь, т. е. сократиться, приводит к появлению сил поверхностного натяжения.

Натянем мыльную пленку на проволочную рамку шириной l (рис. 2), одна сторона AB которой подвижна. Переместим её на dx, увеличив пло-

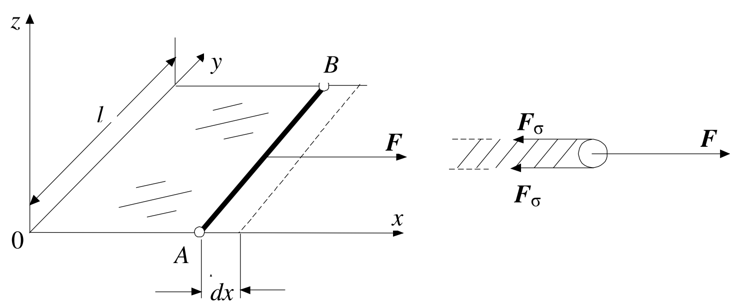


Рис. 2

щадь поверхности пленки. Для этого к стороне AB придется приложить силу $\boldsymbol{F}$, положительная работа которой вызовет возрастание поверхностной энергии пленки

$$dU^{пов} = \sigma dS = \sigma 2l dx,$$

ибо пленка имеет две поверхности. Работа внешней силы

$$dA' = F dx = 2F_\sigma dx,$$

где F_σ (рис. 2) — как раз сила поверхностного натяжения, действующая вдоль поверхности жидкости и стремящаяся её сократить. Приравнивая работу внешней силы увеличению поверхностной энергии[1], получим

$$F_\sigma = \sigma l, \tag{3}$$

т. е. сила пропорциональна длине подвижной стороны рамки.

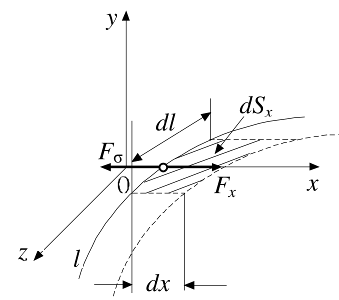


Рис. 3

В более общем случае поверхности жидкости произвольной формы можно провести на ней какую-нибудь линию l (рис. 3) и задаться вопросом, как частицы поверхности по одну сторону этой линии действуют на частицы по другую сторону от неё. Для ответа на этот вопрос мысленно удалим часть поверхности, находящуюся по одну какую-либо сторону от выбранной границы (например по правую на рис. 3). Чтобы другая её часть этого «не почувствовала», подействуем на неё некими внешними силами, приложенными к этой границе и заменяющими действие удаленной части. Как должны быть направлены и чему равны по величине эти силы?

Рассматривая возможные малые перемещения небольшого элемента dl этой границы в изображенной на рис. 3 системе координат, легко видеть, что лишь движение вдоль оси x вызывает изменение dS_x площади примыкающего к нему участка поверхности; смещения его вдоль осей y и z, приводя к деформации поверхности, не сопровождаются изменением её площади ($dS_y = dS_z = 0$). Значит, и работу внешняя сила будет совершать только при смещении отрезка вдоль x: ведь работа эта идет на увеличение поверхностной энергии жидкости, которая пропорциональна площади её поверхности. Перемещения dl, не меняющие эту площадь, совершения работы не требуют.

Если через $\boldsymbol{F}$ обозначить внешнюю силу, необходимую для произвольного перемещения элемента dl, то, очевидно,

$$F_x dx = dA' = dU^{пов} = \sigma dS_x = \sigma dl\, dx\,,$$

$$F_y dy = \sigma dS_y = 0\,,$$

[1] Мы пренебрегаем здесь могущими возникнуть небольшими изменениями температуры пленки и ее теплообменом с окружающей средой. Строго говоря, процесс должен проводиться изотермически (т. е. достаточно медленно).

$$F_z dz = \sigma dS_z = 0 .$$

Отсюда

$$F_x = \sigma dl, \; F_y = 0, \; F_z = 0.$$

Итак, силы поверхностного натяжения F_σ, с которыми взаимодействуют участки поверхности жидкости, разделенные произвольной границей, лежат в касательной плоскости, перпендикулярны этой границе и пропорциональны её длине. Отсюда следует, что коэффициент σ может рассматриваться также как сила, действующая перпендикулярно лежащей на поверхности линии и приходящаяся на единицу её длины, и измеряться в Н/м.

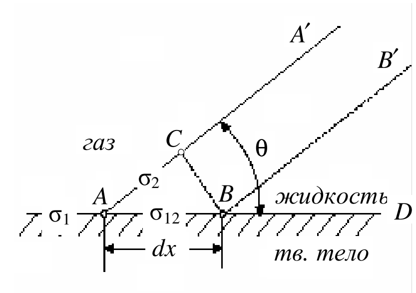
§ 7.4. Смачивание (несмачивание). Краевой угол

Явления, аналогичные поверхностным эффектам на границе жидкости и её насыщенного пара, наблюдаются и при контакте жидкости с другой (несмешивающейся с ней) жидкостью или твердым телом. В этом случае, однако, условия для частиц в приграничном слое усложняются, так как по другую сторону границы находятся молекулы достаточно плотной среды, взаимодействием с которыми уже нельзя пренебречь. Понятно, что и здесь молекулы каждой из соприкасающихся сред вблизи поверхности их контакта находятся в иных условиях по сравнению с частицами на глубине, а потому и здесь можно говорить об избыточной поверхностной энергии, которая, очевидно, также пропорциональна площади поверхности соприкосновения. Для характеристики её вводят коэффициент поверхностного натяжения, относящийся к данной паре соприкасающихся сред,

$$\sigma_{12} = \frac{U_{12}^{пов}}{S_{12}}, \tag{4}$$

где $U_{12}^{пов}$ — *суммарная* избыточная поверхностная энергия граничащих сред, а S_{12} — площадь поверхности их соприкосновения. Очевидно, введенный нами ранее σ жидкости можно рассматривать как σ жидкость — насыщенный пар.

Подобным же образом можно ввести коэффициент поверхностного натяжения твердого тела. Однако если у жидкости наличие избыточной поверхностной энергии приводит к появлению сил, стремящихся сократить (и сокращающих) её поверхность, то у твердых тел действие подобных сил легко компенсируется возникающими в поверхностном слое силами упругости и ни к какому «сжатию» поверхности, конечно, не приводит. В чем же тогда проявляются эти силы?



Практически все их проявления — в эффектах, связанных с изменением поверхностной энергии за счет покрывания части поверхности твердого тела жидкостью. Хотя полная его поверхность при этом, конечно, не меняется, меняется соотношение её частей, контактирующих с жидкостью и газом и обладающих, разумеется, разной удельной поверхностной энергией. Вот тут и возникают силы поверхностного натяжения, действующие на жидкость со стороны твердого тела и стремящиеся свести поверхностную энергию системы к минимуму. Таким образом, проявление сил поверхностного натяжения твердого тела — всегда разностный эффект, обусловленный уменьшением одной части поверхности тела, граничащей с одной средой, и увеличением другой её части, граничащей с другой средой.

Рассмотрим поверхность твердого тела, на которую поместили каплю жидкости. Капля эта будет растекаться по поверхности, пока, наконец, система не придет в состояние устойчивого равновесия. Возникнут три поверхности раздела сред: твердое тело — газ, жидкость — газ и твердое тело — жидкость, характеризующиеся соответственно коэффициентами σ_1, σ_2 и σ_{12}. В равновесии поверхность AA' жидкости на краю капли (рис.4) будет наклонена под вполне определенным углом θ к поверхности AD твердого тела. Угол этот называется краевым углом и может быть найден из следующих соображений.

Поскольку в состоянии равновесия потенциальная энергия системы минимальна, небольшие «смещения» её из этого положения не должны менять в первом приближении её энергию (если функция имеет минимум (или максимум), то в малой его окрестности она практически не меняется). Сдвинем (мысленно) небольшой участок AA' поверхности раздела жидкость — газ на малое расстояние dx вдоль поверхности AD твердого тела. Чтобы остальная часть капли при этом осталась без изменения, это смещение мы должны представлять себе следующим образом: сначала поверхность AA' укоротится на отрезок AC, а затем сдвинется параллельно самой себе в перпендикулярном направлении в положение BB'. Таким образом, исчезают участок поверхности AA' жидкости длиной AC и участок поверхности раздела твердое тело — жидкость длиной dx, но появляется новый участок AB поверхности твердого тела тоже длиной dx. Если ширина смещаемого участка поверхности AA' равна l (отрезок l перпендикулярен плоскости рис. 4), то изменение поверхностной энергии системы

$$\Delta U^{пов} = \sigma_1 dxl - \sigma_2 dxl\cos\theta - \sigma_{12} dxl.$$

Поскольку $\Delta U^{пов} = 0$[1], отсюда получаем

$$\cos\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_{12}}{\sigma_2}. \qquad (5)$$

Если угол $\theta < {}^{\pi}/_{2}$, то говорят, что жидкость смачивает твердое тело, если ${}^{\pi}/_{2} < \theta < \pi$, то не смачивает. Если

$$\sigma_1 \geq \sigma_{12} + \sigma_2, \qquad (6)$$

то наблюдается полное смачивание и жидкость стремится растечься по поверхности тела тончайшим слоем. Если же

$$\sigma_{12} \geq \sigma_1 + \sigma_2, \qquad (7)$$

то имеет место полное несмачивание и жидкость старается стянуть пятно её контакта с твердым телом в точку. Например, вода полностью смачивает, а ртуть — полностью не смачивает стекло. В большинстве случаев реализуются промежуточные ситуации частичного смачивания или несмачивания.

§ 7.5. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Формула Лапласа

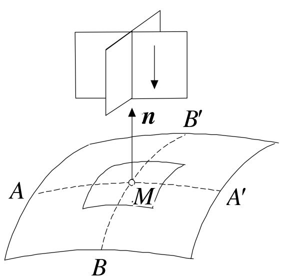


Рис. 5

Одинаково ли давление внутри мыльного пузыря и снаружи? Очевидно, нет. Ведь мыльная пленка стремится сократиться и создать внутри себя некоторое избыточное давление, которое, как мы сейчас увидим, вызвано её кривизной.

Рассмотрим (вообще говоря, не плоскую) поверхность жидкости, граничащую со своим паром (рис. 5). Восставим в произвольной точке M этой поверхности нормаль и «разрежем» её парой взаимно перпендикулярных

[1] Это условие не изменит наличие других потенциальных сил (например, силы тяжести), действующих на систему, ибо смещение dx настолько мало, что перераспределения массы жидкости и изменения ее формы практически не произойдет.

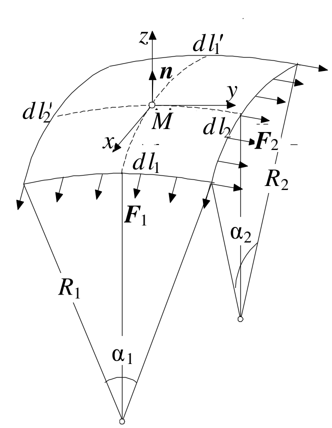


Рис. 6

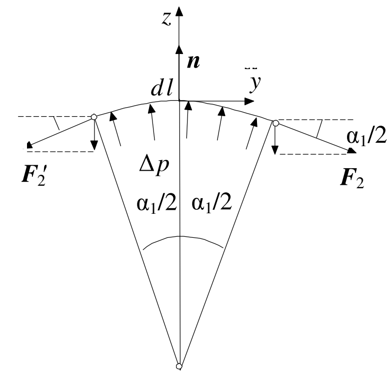


Рис. 7

плоскостей, проходящих через эту нормаль. Получим две дуги AA' и BB', которые в малой окрестности точки M можно приблизительно считать дугами окружностей. Построим в этой окрестности «прямоугольник», стороны которого параллельны дугам AA' и BB', так чтобы точка M находилась в его «центре». Пусть длины этих сторон равны dl_1 и dl_2 (рис. 6), а радиусы их кривизны — соответственно R_1 и R_2.

Запишем баланс сил, действующих на выделенный участок поверхностного слоя жидкости. По периметру перпендикулярно сторонам на него будут действовать силы поверхностного натяжения со стороны окружающих участков поверхностного слоя. Проекции этих сил на плоскость xy в сумме дадут нуль, ибо, $dl_1 \approx dl_1'$ и $dl_2 \approx dl_2'$ а точка M находится в центре прямоугольника (см. рис. 7, где изображено сечение рассматриваемого участка плоскостью zy). Проекция же их результирующей на ось z оказывается отличной от нуля и направленной в сторону вогнутости поверхности. Для её компенсации давление снизу участка должно быть больше, чем сверху на некоторую величину Δp. Чем значительнее этот перепад, тем сильнее выгибается пленка и тем больше проекция касательных сил натяжения на нормаль.

Силы $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_2'$ на рис. 7 — это результирующие сил поверхностного натяжения, распределенных по границам dl_2 и dl_2' (рис. 6) и равных по величине σdl_2 и $\sigma\, dl_2'$ ($dl_2 \approx dl_2'$). Из рис. 7 z-проекция суммы этих сил

$$F_{2z} + F_{2z}' \approx 2F_{2z} = -2F_2 \sin\frac{\alpha_1}{2} \approx -2F_2\frac{\alpha_1}{2} = -F_2\alpha_1\,,$$

ибо при малых углах $\sin\alpha \approx \alpha$. Если учесть теперь, что $F_2 = \sigma dl_2$ и что $dl_2 = R_2\alpha_2$, то это соотношение примет вид

$$F_{2z} + F'_{2z} \approx -\sigma R_2\alpha_2\alpha_1 .$$

Такого же вида результирующая сила будет, очевидно, действовать и на стороны dl_1 и dl'_1:

$$F_{1z} + F'_{1z} \approx -\sigma R_1\alpha_1\alpha_2 .$$

Итак, равнодействующая $\boldsymbol{F}_\sigma$ всех сил поверхностного натяжения, приложенных к выделенному участку поверхностного слоя жидкости, направлена по нормали к поверхности в сторону её вогнутости (в отрицательном направлении оси z на рис.7), проходит через «центр» участка и по величине равна

$$F_\sigma = \sigma\alpha_1\alpha_2(R_1+R_2).$$

Поскольку участок находится в равновесии, на него в положительном направлении оси z должна действовать равная по величине избыточная сила давления

$$F_p \approx \Delta p dS = \Delta p dl_1 dl_2 = \Delta p R_1\alpha_1 R_2\alpha_2.$$

Приравнивая F_σ и F_p, находим

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) . \qquad (8)$$

Полученное выражение называется формулой Лапласа. Оно показывает, что при переходе через искривленную поверхность жидкости давление испытывает так называемый «лапласовский скачок» Δp, представляющий собой разность давлений с вогнутой $p_{вог}$ и выпуклой $p_{вып}$ её сторон. При этом совершенно неважно, с какой стороны от поверхности находится жидкость, а с какой газ. В любом случае $p_{вог} - p_{вып} = \Delta\, p$ и определяется выражением (8).

Пример. На какую высоту h (рис.8) поднимется вода по стеклянной трубке малого радиуса r (капилляру)?

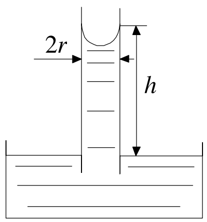


Рис. 8

Поскольку вода полностью смачивает стекло, поверхность жидкости в капилляре (мениск) будет касаться внутренней поверхности трубки ($\theta = 0$) и иметь выпуклость, обращенную вниз. Значит, давление под мениском (т. е. в жидкости) будет меньше давления над ним (т. е. атмосферного p_0) на величину лапласовского скачка Δp. Поэтому вода действительно поднимется по капилляру на некоторую высоту h, чтобы давление, которое в жидкости с высотой уменьшается, упало на нужную величину. Так как радиус капилляра мал, будем считать $h \gg r$, а потому вся поверхность жидкости оказывается на одной и той же высоте h. Это значит, что давление в любой точке непосредственно под мениском практически одинаково и, следовательно, он представляет собой поверхность одинаковой кривизны, т. е. полусферу радиусом r[1].

Таким образом, давление под мениском, с одной стороны, оказывается равным $p_0 - \rho gh$, а с другой — $p_0 - \Delta p$, где Δp — лапласовский скачок. Приравнивая, получаем

$$\rho gh = \Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = \frac{2\sigma}{r},$$

откуда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gr}.$$

Замечание 1. При повороте пары секущих плоскостей, дающих радиусы кривизны R_1 и R_2 поверхности, вокруг нормали оба эти радиуса, вообще говоря, будут меняться. Однако поскольку скачок давления является вполне определенным,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = const\ .$$

Это позволяет производить разрез поверхности наиболее удобным для решения данной задачи способом.

[1] Никакая другая поверхность, имеющая $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = const$, не впишется во внутреннюю трубку капилляра, касаясь его стенок.

Замечание 2. Если поверхность незамкнута (такое бывает, например, когда пленку натягивают на различные каркасы), то $\Delta p = 0$, но поверхность не обязательно плоская. Она может быть искривлена, но так, чтобы $\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_2}$, т. е. радиусы кривизны были разных знаков[1]. Это значит, что центры R_2 кривизны лежат по разные стороны от поверхности (рис.9). Такая поверхность называется «седлом». Поскольку пленка при этом оказывается минимальной площади, то можно утверждать, что незамкнутая поверхность, натянутая на заданный каркас, имеет минимальную площадь в том случае, если в каждой её точке $\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_2}$.

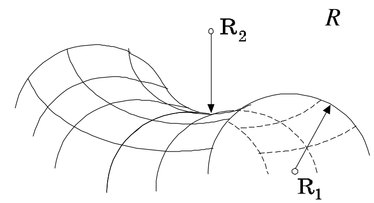


Рис. 9

Контрольные вопросы и задания

1. Показать, что средние расстояния между молекулами жидкости на её поверхности больше, чем на глубине.
2. Дать определение коэффициента поверхностного натяжения. В каких единицах он измеряется, как зависит от температуры?
3. Как направлены и к чему приложены силы поверхностного натяжения жидкости, действующие на её поверхности?
4. Дать определение коэффициента поверхностного натяжения, относящегося к данной паре соприкасающихся сред.
5. Как проявляется действие сил поверхностного натяжения твёрдых тел?
6. Получить выражение для краевого угла при контакте жидкости и твёрдого тела. Что такое смачивание и несмачивание?
7. Вывести формулу Лапласа. Как определяются стоящие в ней радиусы кривизны поверхности?
8. Сравнить давления над и под мениском жидкости, смачивающей стенки капилляра. Какую форму будет иметь мениск?
9. То же для жидкости, не смачивающей стенки капилляра.
10. Какой геометрический вывод позволяет сделать применение формулы Лапласа к незамкнутым поверхностям, опирающимся на заданные контуры?

[1] Нетрудно видеть, что формула Лапласа оказывается справедливой и в этом случае.

Оглавление

Для заметок