<u>Лекция 4</u>

Глава 3. СТАТИКА

Статика — это часть механики, изучающая условия равновесия тел. Условия эти, очевидно, являются следствием более общих законов динамики, ибо, зная, как движется система материальных точек под действием произвольных сил, можно получить условия ее равновесия. Мы, однако, используем более простой (но не менее строгий) подход, позволяющий, не применяя законов Ньютона, исследовать (причем достаточно полно) равновесные состояния систем. Правда, для этого понадобится сформулировать ряд постулатов, относящихся к воздействию силы уже не на материальную точку, а на тело конечных размеров. Справедливость этих постулатов и следствий, вытекающих из них, подтверждается опытом.

§ 3.1. Основные понятия. Теорема о трех силах

Будем рассматривать абсолютно твердое тело, т. е. такое тело, расстояния между двумя любыми точками которого остаются неизменными. Это значит, что мы отвлекаемся от деформаций, возникающих всегда при действии силы на любое реальное тело[1].

Далее, мы не будем различать состояние равномерного прямолинейного движения и покоя, т. е. будем всегда выбирать для рассмотрения ту инерциальную систему отсчета, где тела покоятся. Чтобы исключить возможность свободного вращения тела по инерции, вообще говоря, не противоречащую условиям равновесия, мы будем предполагать, что во всех утверждениях, касающихся силового воздействия на тело, воздействие это оказывается на тело, первоначально находившееся в покое.

Будем говорить, что система сил $\{s\}$ (приложенных к абсолютно твердому телу) находится в равновесии или эквивалентна нулю, если данная система не сообщает телу никакого движения, и записывать это следующим образом: $\{s\}\sim\{0\}$.

1. Аксиомы статики. Существенной характеристикой силы в этих аксиомах помимо величины и направления выступает положение *точки ее приложения*.

1. Система двух сил находится в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине, противоположны по направлению и точ-

[1] Это упрощение приводит в некоторых случаях к тому, что система действующих сил получается статически неопределимой, т. е. число уравнений для их отыскания оказывается меньше числа неизвестных. В таких ситуациях модель абсолютно твёрдого тела становится непригодной и необходимо учитывать возникающие деформации.

ки их приложения лежат на линии действия сил (эти точки могут и совпадать, рис. 1):

$$\{F_1, F_2\} \sim \{0\}. \qquad (1)$$

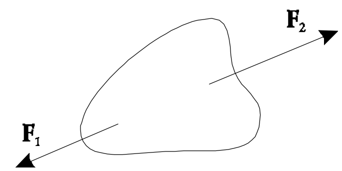

Рис. 1

2. Две системы сил, различающиеся на систему, эквивалентную нулю, эквивалентны между собой:

$$\{s\} \sim \{s\} + \{0\}, \qquad (2)$$

т. е. к любой системе сил можно прибавлять (или отнимать от нее) без изменения ее действия приложенную произвольным образом систему сил, эквивалентную нулю.

Следствие аксиом 1 и 2. Сила (приложенная к абсолютно твердому телу) — вектор скользящий, т. е. точку ее приложения можно произвольно перемещать вдоль линии ее действия.

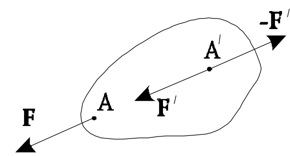

Рис. 2

Для доказательства выберем на линии действия силы $\boldsymbol{F}$, приложенной в точке A (рис. 2), произвольную точку A' и приложим в ней (эквивалентную нулю) систему двух сил $\{\boldsymbol{F}', -\boldsymbol{F}'\}$, равных по величине F. Но силы $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}'$ образуют эквивалентную нулю систему ($\{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}'\} \sim 0$), которую можно отбросить. Таким образом, останется лишь сила $\boldsymbol{F}'$, равная $\boldsymbol{F}$, но приложенная в другой точке.

3. Система двух непараллельных сил, приложенных в одной точке, эквивалентна одной силе (равнодействующей), приложенной в той же точке и определяемой по правилу параллелограмма (содержание этой аксиомы выражает основное свойство сил, приведенное в лекции 2).

2. Теорема о трех силах. Если (абсолютно твердое) тело находится в равновесии под действием *плоской* системы трех *непараллельных* сил (т. е. сил, из которых хотя бы две непараллельны), то линии их действия пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть из трех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, приложенных соответственно в точках A, B и C (рис. 3), непараллельными являются $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Продолжим линии их действия до пересечения в точке O и перенесем в эту точку обе силы. Очевидно, система $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2\}$ эквивалентна $\{\boldsymbol{F}_1', \boldsymbol{F}_2'\}$, а эта последняя уже имеет равнодействующую $\boldsymbol{R}$. Таким образом,

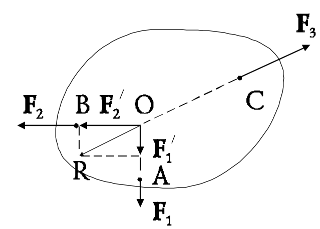

Рис. 3

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3\} \sim \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}_3,\}. \qquad (3)$$

Но система двух сил находится в равновесии только в том случае, если они направлены вдоль одной прямой. Следовательно, линия действия $\boldsymbol{F}_3$ должна совпасть с линией действия $\boldsymbol{R}$, т. е. пройти через точку O.

Замечание. Доказанное условие является необходимым, но не достаточным условием равновесия. Для достаточности нужно еще равенство нулю геометрической суммы приложенных сил (см. § 3.4).

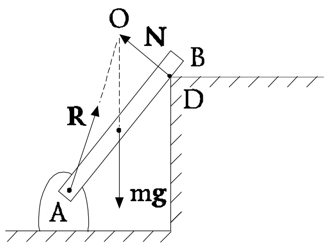

Рис. 4

Пример. Рассмотрим однородную гладкую балку AB массой m, шарнирно закрепленную в точке A и опирающуюся на уступ D (рис. 4). Куда направлена реакция шарнира $\boldsymbol{R}$?

На балку действуют три силы: неизвестная реакция шарнира $\boldsymbol{R}$, сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, приложенная к ее середине и направленная вниз, и сила давления уступа $\boldsymbol{N}$, направленная перпендикулярно балке[1]. Направления сил $m\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{N}$ известны, следовательно, известна и точка их пересечения O. А так как балка находится в равновесии, то сила $\boldsymbol{R}$ тоже должна пройти через эту же точку, т. е. направлена вдоль линии AO.

§ 3.2. Связи. Сухое трение

Связями в механике называются любые условия, которые накладывают ограничения на движение тел. Это различного рода нити, спицы, желобки, поверхности и т. п. Связь действует на движущееся (или находящееся в равновесии) тело с некоторой силой, называемой силой реакции (или просто реакцией) связи. Специфика этой силы состоит в том, что она заранее неизвестна и может принимать различные значения в зависимости от других сил, действующих на тело. Мы будем рассматривать стационарные, т. е. не зависящие от времени, связи.

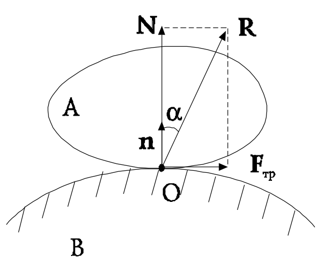

Рис. 5

Рассмотрим какое-либо тело A, лежащее на произвольной поверхности B, служащей связью (рис. 5). Связь действует на тело A с некоторой силой $\boldsymbol{R}$, приложенной в точке контакта O (если контакт осуществляется вдоль некоторой линии или по поверхности, то их нужно разбить на ма-

[1] Почему $\boldsymbol{N}$ перпендикулярна балке, будет вполне ясно из следующего параграфа.

ленькие участки, найти реакцию каждого из них и просуммировать).

Связь называется *идеальной*, если ее реакция $\boldsymbol{R}$ *всегда* перпендикулярна общей касательной плоскости, проходящей через точку касания (направлена вдоль нормали $\boldsymbol{n}$). В этом случае $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N}$.

Связь называется *неидеальной*, если ее реакция $\boldsymbol{R}$ *может* составлять с нормалью $\boldsymbol{n}$ некоторый угол α. В этом случае

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{тр}.$$

Тангенциальная составляющая $\boldsymbol{F}_{тр}$ реакции называется силой (сухого) трения.

1. Законы сухого трения. Различают силу трения покоя (когда нет взаимного проскальзывания трущихся поверхностей) и силу трения скольжения (когда такое проскальзывание есть). Опыт дает, что сила трения обладает следующими свойствами.

1. Сила трения покоя, действуя в общей касательной плоскости, имеет, в зависимости от других приложенных к телу сил и условий, в которых оно находится, такие величину и направление, которые необходимы для предотвращения проскальзывания тела и связи, но не может стать больше некоторой предельной величины F_{max}, т. е.

$$F_{тр} \le F_{max} . \quad (4)$$

2. Максимальная величина силы трения покоя, при которой начинается взаимное проскальзывание соприкасающихся тел, пропорциональна силе нормального давления N:

$$F_{max} = kN . \quad (5)$$

Константа k называется коэффициентом трения (покоя) данной пары материалов и зависит как от самих материалов, так и от характера обработки их поверхностей, а также от состояния окружающей среды (температуры, влажности и т. п.).

3. Если трущиеся тела контактируют по некоторой поверхности, то сила трения не зависит от площади их контакта.

4. Сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную относительной скорости, а ее величина определяется выражением

$$F_{тр} = k'N, \quad (6)$$

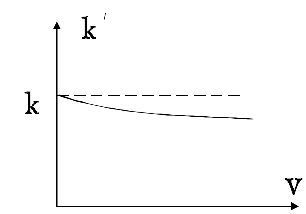

Рис. 6

где коэффициент k' уже не является константой, а зависит от относительной скорости v. Для большинства (но не для всех) пар материалов k' с ростом скорости сначала несколько падает, а затем сохраняет почти постоянное значение (рис. 6). В дальнейшем рассмотрении мы пренебрежем этой зависимостью и будем считать k' константой, приблизительно равной коэффициенту трения покоя:

$$k' \cong k = const. \tag{7}$$

2. Реакция связи с трением. Угол трения. Итак, реакция неидеальной связи может отклоняться (в зависимости от других действующих на тело сил) от нормали к поверхности на некоторый угол α (см. рис. 5). Чем больше возникающая сила трения (при $N = const$), тем больше и величина этого угла. Поскольку $F_{тр}$ не может превышать своего предельного значения F_{max}, ограниченной оказывается и величина угла α. *Максимальный угол, который реакция неидеальной связи может образовать с нормалью, называется углом трения* $\alpha_{тр}$, а его значение, очевидно, определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha_{тр} = \frac{kN}{N} = k\ . \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует, что если тело движется, то, как бы ни менялась при этом сила нормального давления, полная реакция связи $\boldsymbol{R}$ составляет с нормалью неизменный угол $\alpha_{тр} = \operatorname{arctg} k$.

Пример 1. Тело лежит на наклонной плоскости (рис. 7). Угол α медленно увеличивается. При каком α начнется скольжение? Известен коэффициент трения k.

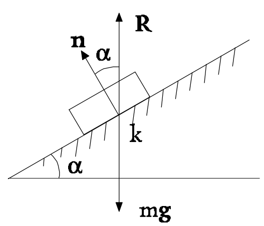

Рис. 7

Тело находится в равновесии под действием двух равных и противоположных сил — тяжести $m\boldsymbol{g}$ и реакции $\boldsymbol{R}$. По мере увеличения угла α реакция $\boldsymbol{R}$, оставаясь вертикальной и уравновешивая силу тяжести, будет составлять с нормалью $\boldsymbol{n}$ все больший и больший угол, пока последний не сравняется с углом трения $\alpha_{тр} = \operatorname{arctg} k$. При дальнейшем росте α реакция уже "не сможет" оставаться вертикальной, равновесие нарушится и тело придет в движение.

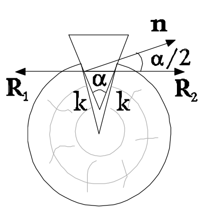

Рис. 8

Пример 2. При каком значении коэффициента трения k клин, заколоченный в бревно (рис. 8), не будет из него выскальзывать? Известен угол α.

Клин находится в равновесии под действием двух (в пренебрежении тяжестью) равных и противоположных реакций $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, каждая из которых составляет с нормалью угол. $\frac{\alpha}{2}$ Этот угол не может быть больше угла трения. Следовательно, клин не выскользнет, если $k \ge \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

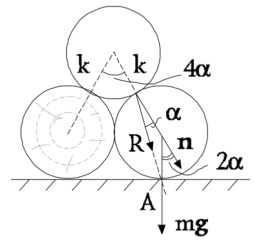

Рис. 9

Пример 3. На земле, слегка касаясь, лежат два одинаковых бревна, а на них — еще такое же (рис. 9). При каком коэффициенте трения k между бревнами они не раскатятся? Известно, что по земле бревна не скользят.

Нижнее бревно находится в равновесии под действием трех сил: тяжести $m\boldsymbol{g}$, реакции $\boldsymbol{R}$ со стороны верхнего бревна и реакции со стороны земли (на рисунке не показана), приложенной в точке A. Нетрудно видеть, что реакция земли направлена не вертикально (подумайте, почему), и, стало быть, данная система сил непараллельна. По теореме о трех силах линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке. Но точка пересечения двух из них известна: это точка A, в которой приложена реакция земли и через которую проходит сила тяжести $m\boldsymbol{g}$. Значит, в эту точку направлена и реакция $\boldsymbol{R}$ верхнего бревна, составляя с нормалью $\boldsymbol{n}$ угол $\alpha = 15°$, который, очевидно, не может превышать угла трения. Стало быть, $k \ge \mathrm{tg}15°$.

Пример 4. Брусок массой m лежит на горизонтальном столе (рис. 10, а). Какой минимальной силой $\boldsymbol{F}_{min}$ можно сдвинуть его с места, если коэффициент трения между ним и столом равен k?

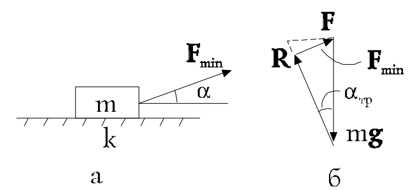

Рис. 10

Брусок находится в равновесии под действием трех сил: тяжести $m\boldsymbol{g}$, реакции стола $\boldsymbol{R}$ и приложенной силы $\boldsymbol{F}$, сумма которых равна нулю. Перед самым началом скольжения реакция $\boldsymbol{R}$ отклонится от нормали на угол трения $\alpha_{тр}$ (рис. 10, б). Из рисунка видно, что замыкающая силовой треугольник сила $\boldsymbol{F}$, если ее направить горизонтально, не будет минимальной. Наименьшей ее величине, очевидно, соответствует направление, перпендикулярное реакции $\boldsymbol{R}$. Итак, минимальная сила $\boldsymbol{F}_{min}$, сдвигающая брусок, должна образовывать с горизонталью угол $\alpha = \alpha_{тр} = \mathrm{arctg}\,k$, а по величине, как это следует из рис.10, б, равняться $mg\sin\alpha_{тр}$.

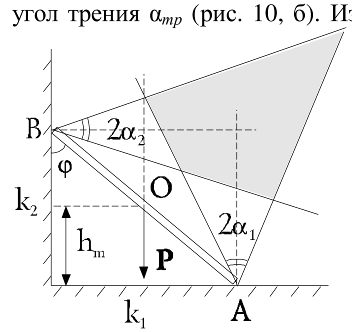

Рис. 11

Пример 5. Невесомая лестница AB опирается своими концами на пол и стену (рис. 11). На какую максимальную высоту h_m может подняться по лестнице человек, не нарушая ее равновесия? Известны коэффициенты трения k_1 и k_2.

На лестницу действуют три силы: реакция пола $\boldsymbol{R}_1$ в точке A, реакция стены $\boldsymbol{R}_2$ в точке B и вес человека $\boldsymbol{P}$ в точке O. Допустимые направления реакций $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ лежат внутри удвоенных углов трения $2\alpha_1 = 2\mathrm{arctg}\, k_1$ и $2\alpha_2 = 2\mathrm{arctg}\, k_2$. На рис. 11 заштрихована область возможного их пересечения. По теореме о трех силах эту область должна пересечь и линия действия веса человека $\boldsymbol{P}$. Таким образом, человек, не нарушая равновесия лестницы, сможет подняться лишь до точки O. При дальнейшем подъеме силы $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{P}$ уже не будут пересекаться в одной точке и равновесие нарушится. Чтобы подняться до конца лестницы, нужно, как видно из рисунка, уменьшить угол φ ее наклона к вертикали до величины, не превышающей α_1 (в этом случае от угла трения α_2 результат не зависит).

§ 3.3. Параллельные силы

Имеет ли система параллельных сил, приложенных к абсолютно твердому телу, равнодействующую, т. е. существует ли одна сила, эквивалентная данной системе? Если да, то как ее найти? Для ответа на эти вопросы рассмотрим сначала простейший случай двух сил.

1. Система двух параллельных сил. Пусть две параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, направленные в одну сторону, приложены к абсолютно твердому телу в точках A и B (рис. 12). Добавим к этим силам эквивалентную нулю систему численно равных и противоположных сил $\{\boldsymbol{P}, -\boldsymbol{P}\}$, действующих вдоль линии AB и приложенных в точках A и B.

Построим равнодействующие $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{P}$, которые оказываются уже не параллельными. Очевидно, $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2\} \sim \{\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2\}$. Найдем точку пересечения линий действия сил $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ и перенесем в нее эти силы. Таким образом, вместо параллельных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ мы получили эквивалентную систему $\{\boldsymbol{R}_1', \boldsymbol{R}_2'\}$ приложенных в одной точке непараллельных сил, имеющих равнодействующую.

Для ее отыскания разложим каждую из сил $\boldsymbol{R}_1'$ и $\boldsymbol{R}_2'$ по правилу параллелограмма на две составляющие $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{F}_1'$ и соответственно $-\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{F}_2'$, параллельные прямой AB и силам $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Получим систему четырех сил $\{\boldsymbol{F}_1', \boldsymbol{F}_2', \boldsymbol{P}', -\boldsymbol{P}'\}$, приложенных в точке C. Систему сил $\{\boldsymbol{P}', -\boldsymbol{P}'\}$ отбросим как эквива-

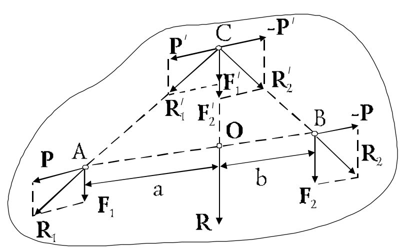

Рис. 12

лентную нулю; останутся силы $\boldsymbol{F}_1'$ и $\boldsymbol{F}_2'$, направленные вдоль прямой, параллельной силам $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Очевидно, их сумма $\boldsymbol{R}$ (перенесенная в точку O) и является равнодействующей сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Направлена она в ту же сторону, а величина ее

$$R = F_1 + F_2\,. \tag{9}$$

Линия действия $\boldsymbol{R}$ проходит через точку O, положение которой на прямой AB определяется соотношением величин сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Действительно, из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{F_1}{P} = \frac{CO}{AO},\ \frac{F_2}{P} = \frac{CO}{OB}\,. \tag{10}$$

Деля первое равенство на второе, получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OB}{AO} = \frac{b}{a}\,. \tag{11}$$

Итак, система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, направленную в ту же сторону. Величина ее равна сумме модулей складываемых сил, а линия действия делит отрезок, соединяющий точки их приложения, на части, обратно пропорциональные силам.

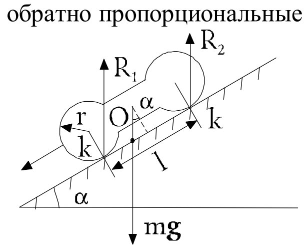

Рис. 13

Замечание. Нетрудно видеть, что разложение заданной силы $\boldsymbol{R}$ на две параллельные неоднозначно. Задача полностью определится, если задать еще, например, величину одной из сил и линию ее действия.

Пример. Гантель заданных размеров равномерно соскальзывает с наклонной плоскости (рис. 13). Какой из ее шаров действует на плоскость с большей силой и во сколько раз, если угол наклона плоскости равен α?

При скольжении гантели обе реакции $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ наклонены к нормали под одним и тем же углом α_{mp}, т. е. параллельны. Так как движение равномерное, их равнодействующая должна уравновешивать силу тяжести $m\boldsymbol{g}$, т. е. быть вертикальной, причем линия ее действия должна проходить через точку O. Но точка O ближе к $\boldsymbol{R}_1$, чем к $\boldsymbol{R}_2$, стало быть, $R_1 > R_2$. В соответствии с (11) и рис. 13

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\dfrac{l}{2} + r\,\mathrm{tg}\alpha}{\dfrac{l}{2} - r\,\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\dfrac{l}{2} + kr}{\dfrac{l}{2} - kr}\,.$$

2. Система двух антипараллельных сил. Рассмотрим две неравные по величине параллельные силы, направленные в противоположные стороны (рис. 14). Для отыскания их равнодействующей разложим бóльшую из них ($\boldsymbol{F}_2$) на две параллельные составляющие $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$, одна из которых ($\boldsymbol{Q}$) равна по величине силе $\boldsymbol{F}_1$ и лежит на линии ее действия. Таким образом, $\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2\} \sim \{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{R},\boldsymbol{Q}\}$. Но система сил $\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{Q}\} \sim 0$, и ее можно отбросить. Останется сила $\boldsymbol{R}$, которая и является равнодействующей двух антипараллельных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Направлена она в сторону большей силы $\boldsymbol{F}_2$, а ее величина и линия действия определяются из соотношений (9) и (11):

$$R = F_2 - Q, \tag{12}$$

$$\frac{Q}{b} = \frac{R}{c} = \frac{Q+R}{b+c} = \frac{F_2}{a}. \tag{13}$$

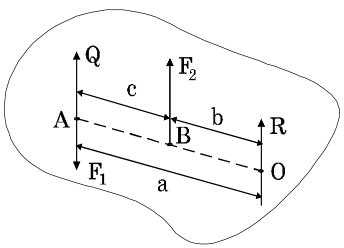

Рис. 14

С учетом того, что $Q = F_1$, (12) и (13) примут вид

$$R = F_2 - F_1, \tag{14}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}. \tag{15}$$

Итак, система двух неравных антипараллельных сил имеет равнодействующую, направленную в сторону большей силы. Величина ее равна разности модулей складываемых сил, а линия действия проходит за пределами отрезка (со стороны большей силы), соединяющего точки их приложения, и отстоит от них на расстояния, обратно пропорциональные силам.

Замечание. Приведенные рассуждения неприменимы к случаю равных по величине антипараллельных сил. Если $F_1 \to F_2$, то $R \to 0$, а линия ее действия, как это следует из соотношения (15), "уходит" в бесконечность. Такая система сил, называемая парой, равнодействующей не имеет и является в механике самостоятельным элементом (таким же, как и сила).

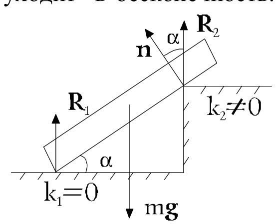

Рис. 15

Пример. Однородная балка лежит на ступеньке, образуя с горизонталью угол α (рис. 15). При каком k_2 возможно равновесие, если $k_1 = 0$?

Так как $k_1 = 0$, сила $\boldsymbol{R}_1$ вертикальна. Значит, реакция $\boldsymbol{R}_2$ должна уравновесить равнодействующую двух антипараллельных сил $\boldsymbol{R}_1$ и $m\boldsymbol{g}$, т. е. должна быть тоже вертикальна и, следовательно, отклониться от нормали к балке на угол α. Поскольку этот угол не может быть больше угла трения, $k_2 \geq \mathrm{tg}\alpha$.

3. Система многих параллельных сил. Центр тяжести. Рассмотрим совокупность нескольких параллельных сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, направленных в одну сторону и приложенных к абсолютно твердому телу в точках A_1, A_2, ..., A_n, положение которых задается радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ..., $\boldsymbol{r}_n$ (рис. 16). Найдем сперва равнодействующую $\boldsymbol{R}_2$ сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Она, очевидно, будет направлена в ту же сторону, а величина ее в соответствии с (9)

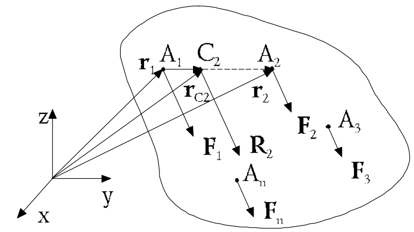

Рис. 16

$$R_2 = F_1 + F_2. \tag{16}$$

Для нахождения линии действия $\boldsymbol{R}_2$ соединим точки A_1 и A_2 отрезком прямой и составим, используя (11), пропорцию

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{C_2A_2}{A_1C_2}\,, \tag{17}$$

или

$$F_1 \cdot A_1C_2 = F_2 \cdot C_2A_2\,, \tag{18}$$

где C_2 — точка на отрезке A_1A_2, через которую проходит $\boldsymbol{R}_2$.

Умножим скалярное равенство (18) на единичный вектор $\boldsymbol{e}$, направленный вдоль прямой A_1A_2 (от A_1 к A_2; на рисунке не показан). Получим уже векторное соотношение

$$F_1 \cdot \boldsymbol{A_1C_2} = F_2 \cdot \boldsymbol{C_2A_2}\,. \tag{19}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{A_1C_2} = \boldsymbol{r}_{C2} - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{C_2A_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_{C2}$, получим уравнение, связывающее радиус-векторы точек A_1, A_2 и C_2:

$$F_1(\boldsymbol{r}_{C2} - \boldsymbol{r}_1) = F_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_{C2}). \tag{20}$$

Решая его относительно $\boldsymbol{r}_{C2}$, найдем положение точки C_2, через которую проходит равнодействующая сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$:

$$\boldsymbol{r}_{C2} = \frac{F_1\boldsymbol{r}_1 + F_2\boldsymbol{r}_2}{F_1 + F_2}\,. \tag{21}$$

Положение этой точки, как явствует из (21), определяется точками приложения сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ и их величинами.

Добавим теперь к равнодействующей $\boldsymbol{R}_2$ силу $\boldsymbol{F}_3$, т. е. найдем равнодействующую $\boldsymbol{R}_3$ трех параллельных сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$. Направление ее будет тем же, а величина в соответствии с (9) и (16)

$$R_3 = R_2 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3\,. \tag{22}$$

Радиус-вектор точки ее приложения (точнее, точки, через которую она проходит) определяется выражением (21), в которое вместо F_1 и $\boldsymbol{r}_1$ надо подставить R_2 и $\boldsymbol{r}_{C2}$:

$$\boldsymbol{r}_{C3} = \frac{R_2\,\boldsymbol{r}_{C2} + F_3\,\boldsymbol{r}_3}{R_1 + F_3}\,, \tag{23}$$

или с учетом (16) и (21)

$$\boldsymbol{r}_{C3} = \frac{F_1\boldsymbol{r}_1 + F_2\boldsymbol{r}_2 + F_3\boldsymbol{r}_3}{F_1 + F_2 + F_3}\,. \tag{24}$$

Добавляя далее к $\boldsymbol{R}_3$ силу $\boldsymbol{F}_4$ и используя (21), (22) и (24), получим равнодействующую четырех сил, затем пяти и т. д. Продолжая подобные рассуждения, для n сил найдем

$$R_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i\,, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{r}_{cn} = \frac{F_1\boldsymbol{r}_1 + F_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots + F_n\boldsymbol{r}_n}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\,\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}\,, \tag{26}$$

т. е. равнодействующая системы параллельных сил, направленных в одну сторону, существует, направлена в ту же сторону, величина ее равна сумме модулей складываемых сил, а радиус-вектор точки, через которую проходит линия ее действия, определяется выражением (26)[1]. Точка эта называется центром параллельных сил.

Векторное соотношение (26) можно представить в виде трех выражений, определяющих координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i},\ y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i},\ z_c = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}\,. \tag{27}$$

Замечание 1. Мы рассмотрели систему параллельных сил, направлен-

[1] Мы фактически уже не раз пользовались этим, заменяя, например, силы тяжести, распределённые по всему объёму тела, их равнодействующей $m\boldsymbol{g}$.

ных в одну сторону. Если в заданной системе имеются силы, направленные в противоположную сторону, то ее нужно разбить на две подсистемы с одинаковым направлением сил, найти для каждой системы равнодействующую и затем их сложить как две антипараллельные силы.

Замечание 2. Если параллельными силами, действующими на тело, являются силы однородного поля тяжести, то центр таких сил называется центром тяжести тела. Нетрудно видеть, что он совпадает с центром масс этого тела. Действительно, если поле тяжести однородно, т. е. $\boldsymbol{g}$ в каждой точке постоянно по величине и направлению, то сила тяжести, приложенная к $\boldsymbol{i}$-й материальной точке массы m_i, $\boldsymbol{P}_i = m_i\boldsymbol{g}_i$ и для центра тяжести получим

$$\boldsymbol{r}_{ц.т.} = \frac{\sum P_i \boldsymbol{r}_i}{\sum P_i} = \frac{\sum m_i g\, \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i g} = \frac{g\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{g\sum m_i} = \boldsymbol{r}_{ц.м.}\,. \tag{28}$$

Физический мир, как и мир, окружающий нас, тесен: комбинация $\dfrac{\sum K_i \boldsymbol{r}_i}{\sum K_i}$ снова "всплыла", хотя центр масс и центр параллельных сил физически совершенно различные понятия!

Замечание 3. Как видно из формул (26) или (27), положение центра параллельных сил определяется точками приложения этих сил и их модулями, но не направлением их действия. Отсюда следует, что если повернуть все силы (не меняя точек их приложения) на один и тот же угол, то центр этих сил останется в прежней точке. В частности, при повороте тела на произвольный угол в поле тяжести его центр тяжести не переместится относительно тела, т. е. это вполне определенная точка, связанная с геометрией тела (это следует, впрочем, и из формулы (28)).

§ 3.4. Общие условия равновесия

Ограничимся для простоты рассмотрением плоской системы сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Полученные результаты оказываются справедливыми и для случая произвольной ориентации сил в пространстве.

1. Пара сил. Парой сил называется, как уже отмечалось, система двух равных по величине антипараллельных сил, действующих не по одной прямой (рис. 17). Расстояние a между линиями действия сил называется *плечом* пары. Пара оказывает на тело "вращательный эффект", для характеристики которого вводится особая величина — момент пары. *Моментом пары называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы*

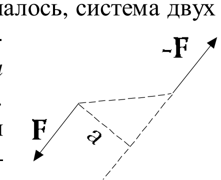

Рис. 17

пары на ее плечо[1]:

$$M = \pm Fa. \qquad (29)$$

Знак выбирается в зависимости от того, в какую сторону пара стремится повернуть тело. Условимся положительным считать момент, "вращающий" против часовой стрелки[2]. Пару нельзя заменить одной силой (см. Дополнение); она является таким же самостоятельным элементом в механике, как и сила.

Моментом силы относительно точки, или центра, О (рис. 18) *называется произведение ее модуля на расстояние от точки до линии действия силы:*

$$M_0 = \pm Fa. \qquad (30)$$

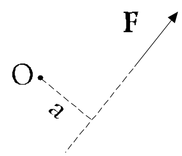

Рис. 18

Это расстояние называется *плечом силы относительно точки О.* Знак моменту приписывается так же, как и моменту пары[3].

Можно показать (см. Дополнение), что *единственной* характеристикой пары является ее момент. Это значит, что две пары, различающиеся величинами, точками приложения и направлениями своих сил, но имеющие равные моменты, эквивалентны, т. е. оказывают на твердое тело совершенно одинаковое действие. Далее, две любые пары, одновременно действующие на тело, эквивалентны одной, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Таким образом, произвольную систему пар можно свести к одной "результирующей". Эти удивительные свойства пары вместе с приведенными в начале данной лекции аксиомами (из которых эти свойства и вытекают) позволяют получить общие (необходимые и достаточные) условия равновесия произвольной системы сил, приложенных к абсолютно твердому телу, или, проще говоря, условия равновесия тела.

2. Приведение произвольной системы сил. Докажем сначала так называемую лемму приведения.

Лемма. Всякая сила, приложенная в данной точке A, эквивалентна той же силе, приложенной в произвольной точке B, и паре, момент которой

---

[1] Это определение является вполне строгим лишь в том случае, когда рассматриваются пары, лежащие в одной плоскости. При более общем подходе плечу пары приписывается направление и из двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{F}$ строится по определённым правилам *вектор* момента пары.

[2] Понятно, что если “посмотреть“ на пару с другой стороны (т. е. из-за плоскости рисунка), то её момент сменит знак, так что его выбор является условной процедурой. Смысл её состоит в том, чтобы, выбрав “точку наблюдения“, “смотреть“ из неё на все пары и не менять её до конца решения задачи.

[3] Вообще говоря, момент силы тоже является вектором и строится аналогично вектору-моменту пары

равен моменту заданной силы относительно точки B (рис.19).

Доказательство. Пусть в точке A на тело действует сила $\boldsymbol{F}$. Приложим в точке B две взаимно противоположные силы $\boldsymbol{F}'$ и $-\boldsymbol{F}'$, равные по величина силе $\boldsymbol{F}$ и параллельные ей. Очевидно, что $\{\boldsymbol{F}\} \sim \{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}', -\boldsymbol{F}'\}$. Но силы $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}'$ образуют пару, момент которой

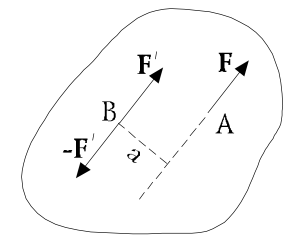

Рис. 19

$$M = Fa$$

равен моменту силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольную совокупность сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, ..., \boldsymbol{F}_n$, действующих на тело. Выберем произвольный центр O (центр приведения) и перенесем в него все силы. От переноса каждой силы появится пара, момент которой равен моменту этой силы относительно точки O. В итоге получим n сил, приложенных в одной точке и имеющих равнодействующую, и n пар, которые эквивалентны одной результирующей.

Складывая все силы, получим вектор

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + ... + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \,, \tag{31}$$

называемый *главным вектором* системы сил, а суммируя моменты всех пар, найдем момент результирующей пары

$$M_0 = M_1 + M_2 + ... + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} F_i a_i \,, \tag{32}$$

где a_i — плечо i-й силы относительно точки O, взятое со знаком "плюс" или "минус", в зависимости от того, против или по часовой стрелке "вращает" сила. Момент этот называется *главным моментом* системы относительно точки O.

Если сменить центр приведения, то, очевидно, главный вектор не изменится, а главный момент изменится, ибо плечи всех сил относительно нового центра станут другими.

Отсюда сразу следуют общие условия равновесия произвольной системы сил: *для того чтобы система сил находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) геометрическая сумма всех сил равнялась нулю, т. е.

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \,; \tag{33}$$

2) алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любого *центра равнялась нулю,* т. е.

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} F_i a_i = 0\,, \tag{34}$$

где O — произвольный центр.

Достаточность этих условий очевидна (система сил, удовлетворяющих условиям (33) и (34), эквивалентна нулю).

Докажем их необходимость. Пусть система сил (или тело, к которому они приложены) находится в равновесии. Возможны четыре случая:

1) $R = 0$, $M_0 \neq 0$; 2) $R \neq 0$, $M_0 = 0$; 3) $R \neq 0$, $M_0 \neq 0$ и 4) $R = 0$, $M_0 = 0$.

Случай 1 отпадает, так как система не может находиться в равновесии под действием двух сил результирующей пары, действующих не по одной прямой.

Случай 2 отпадает, ибо не равная нулю сила $\boldsymbol{R}$ выведет тело из равновесия.

Случай 3 тоже отпадает, поскольку пара не может уравновесить силу $\boldsymbol{R}$ (в противном случае она имела бы равнодействующую $-\boldsymbol{R}$, что невозможно).

Остается случай 4, т. е. необходимость доказана.

Замечание 1. Можно показать, что все приведенные в Дополнении теоремы, а следовательно, процедура приведения и общие условия равновесия (33) и (34), справедливы для самого общего случая системы произвольно ориентированных в пространстве сил. Именно для того чтобы можно было складывать моменты сил этой системы, они и наделяются свойствами вектора.

Замечание 2. Моментом силы относительно оси называется момент перпендикулярной оси составляющей этой силы относительно точки, в которой ось пересекает нормальную плоскость (т. е. составляющая силы вдоль оси вклада в момент не дает). В случае плоской системы сил их моменты относительно любой точки, очевидно, могут рассматриваться как моменты относительно перпендикулярной оси, проходящей через эту точку.

ДОПОЛНЕНИЕ

Сформулируем ряд теорем, определяющих свойства пары, и обсудим в общих чертах их доказательства. Читатель без труда сможет развить высказанные идеи и самостоятельно получить строгие доказательства этих теорем.

Теорема 1. Пара сил $\{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}\}$ равнодействующей не имеет.

Если бы эта равнодействующая $\boldsymbol{R}$ существовала, то система сил $\{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{R}\}$ была бы эквивалентна нулю, что находится в противоречии либо с теоремой о трех силах (если $\boldsymbol{R} \nparallel \boldsymbol{F}$), либо с первой аксиомой (если $\boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{F}$).

Теорема 2. Момент пары равен алгебраической сумме моментов сил пары относительно любого центра:

$$M\{\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F}\} = M_O\{\boldsymbol{F}\} + M_O\{-\boldsymbol{F}\}, \quad (35)$$

где O — произвольный центр.

Для доказательства достаточно воспользоваться определениями моментов пары (29) и силы (30).

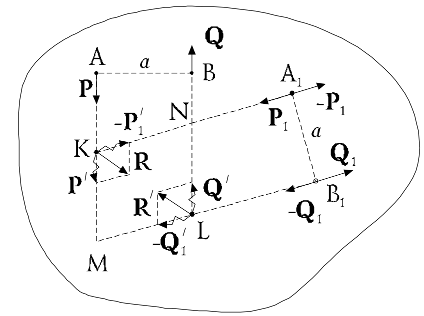

Рис. 20

Теорема 3. Действие пары на абсолютно твердое тело не изменяется, если переместить пару в другое положение в плоскости ее действия.

Доказательство. Пусть силы пары $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ приложены к концам A и B ее плеча (рис. 20). Переместим плечо пары AB в новое положение A_1B_1 и приложим к точкам A_1 и B_1 эквивалентную нулю систему равных по модулю сил $\{\boldsymbol{P}_1, -\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Q}_1, -\boldsymbol{Q}_1\}$. Все силы этой системы направим перпендикулярно плечу A_1B_1, а по величине выберем их равными силам пары $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Очевидно, $\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\} \sim \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}_1, -\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Q}_1, -\boldsymbol{Q}_1\}$.

Продлим линии действия сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{Q}_1$ до точек их взаимного пересечения. Полученный параллелограмм $KNLM$ будет ромбом, ибо $AB = A_1B_1$. Перенесем теперь равные по величине силы $\boldsymbol{P}$ и $-\boldsymbol{P}_1$ в точку K, а силы $\boldsymbol{Q}$ и $-\boldsymbol{Q}_1$ в точку L и попарно их сложим. Получим две силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}'$, равные по модулю и направленные вдоль диагонали ромба KL навстречу друг другу, которые, очевидно, взаимно уравновесятся. Таким образом, система сил

$$\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, -\boldsymbol{P}_1, -\boldsymbol{Q}_1\} \sim \{\boldsymbol{P}', \boldsymbol{Q}', -\boldsymbol{P}_1', -\boldsymbol{Q}_1'\} \sim \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'\} \sim 0$$

и ее можно отбросить. Останется лишь пара $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Q}_1\}$, идентичная исходной паре $\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$, перенесенной в другое положение.

Теорема 4. Действие пары не изменится, если произвольно изменить силы и плечо пары, сохраняя постоянным ее момент.

Для доказательства разложим одну из сил $\boldsymbol{P}$ пары (рис. 21) на две параллельные составляющие, одна из которых ($\boldsymbol{R}$) лежит на линии действия второй силы пары и произвольна по величине ($R < P$). Получим новую пару $\{(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{R}), (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{R})\}$, имеющую в соответствии с (11) или (13) тот же момент, что и экви-

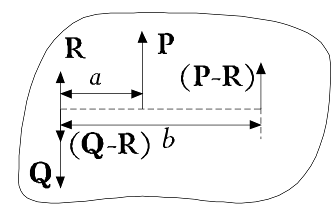

Рис. 21

валентная ей пара $\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$.

Из приведенных теорем 3 и 4 вытекает, что пары, имеющие равные моменты, эквивалентны, ибо одна из них может быть всегда преобразована в другую. Иными словами, любая пара может быть полностью охарактеризована единственным параметром — своим моментом.

Теорема 5 (сложение пар). Система нескольких пар эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической (в произвольном случае — векторной) сумме моментов этих пар.

Для доказательства приведем все пары к одному плечу и перенесем в одно место (совместим эти плечи). Получим одну пару, момент которой будет определяться произведением ее плеча на (алгебраическую) сумму приложенных к одному из ее концов сил, т. е. будет равен сумме моментов исходных пар.

Оказывается, пары можно складывать!

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать аксиомы статики. Показать, что сила, приложенная к абсолютно твёрдому телу, есть вектор скользящий.
2. Сформулировать и доказать теорему о трёх силах.
3. Дать определение связей в механике. Что такое идеальная (неидеальная) связь? Что называется силой сухого трения?
4. Сформулировать законы сухого трения.
5. Что такое угол трения?
6. Найти, используя аксиомы статики, равнодействующую двух параллельных сил.
7. То же для двух не равных по модулю антипараллельных сил.
8. Найти равнодействующую многих параллельных сил. Как она называется?
9. Что такое центр тяжести? Показать, что для однородного поля тяжести центр тяжести любого тела совпадает с его центром масс.
10. Что называется парой сил? Дать определение момента пары. Это вектор или скаляр, арифметическая или алгебраическая величина?
11. То же для момента силы (относительно заданного центра).
12. Сформулировать и доказать лемму приведения.
13. Сформулировать и доказать (для случая плоской системы сил) общие условия равновесия.