Лекция 3

§ 2.6. Работа силы. Кинетическая энергия

Наряду с временно́й характеристикой силы — ее импульсом, вводят пространственную, называемую работой. Как всякий вектор, сила в общем случае характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Если эта точка совершает малое перемещение $d\boldsymbol{r}$, то говорят, что сила при этом совершает (тоже малую, или элементарную) *работу dA, равную скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:*

$$dA = (\boldsymbol{F},\, d\boldsymbol{r}). \tag{1}$$

Напомним, что скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \equiv |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\,\hat{}\,\boldsymbol{b}). \tag{2}$$

Поскольку произведение $|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{}\boldsymbol{b})$ есть проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на направление $\boldsymbol{a}$ (b_a), скалярное произведение можно записать следующим образом:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = ab_a = ba_b\,. \tag{3}$$

Перечислим кратко основные свойства скалярного произведения:

1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = a^2$;

2) $(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,

где k - скаляр;

3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

4) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt})$.

Свойства 1 и 2 следуют непосредственно из определения, свойства 3 и 4 — из соотношения (3), а также того обстоятельства, что проекция суммы векторов равна сумме их проекций.

Перемещение $d\boldsymbol{r}$ в (1) должно быть настолько малым, чтобы на всем его протяжении сила $\boldsymbol{F}$ не менялась заметно ни по величине, ни по направлению.

Если точка приложения силы совершает конечное перемещение, то нужно разбить траекторию ее движения на малые отрезки $d\boldsymbol{r}_i$ (рис. 1) и вычислить элементарную работу на каждом из них. *Работой силы вдоль всей траектории 1—2 называется сумма элементарных работ на всех ее участках:*

$$A_{12} = dA_1 + dA_2 + \ldots + dA_n = \sum_{i=1}^{n} dA_i = \sum_{i=1}^{n} F_i dr_i \cos\alpha_i \,. \qquad (4)$$

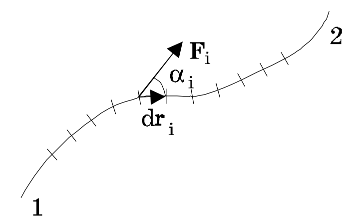

Рис. 1

При действии нескольких сил, имеющих общую точку приложения, работа их равнодействующей при каком-либо перемещении (элементарном или конечном) этой точки равна сумме работ каждой силы на этом перемещении. Это легко понять, если воспользоваться определением скалярного произведения в форме (3) и учесть, что проекция суммы сил равна сумме их проекций.

Кинетической энергией w *движущейся материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения ее массы m на квадрат скорости* v*:*

$$w = \frac{mv^2}{2}. \qquad (5)$$

Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий всех этих точек:

$$W = w_1 + w_2 + \ldots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^{\,2}}{2} \,. \qquad (6)$$

При действии силы на движущуюся точку величина ее скорости, а следовательно, и кинетическая энергия, вообще говоря, будут меняться. При этом сила, поскольку точка ее приложения перемещается, будет совершать определенную работу. Покажем, что эта работа равна как раз изменению кинетической энергии движущейся точки. Для этого рассмотрим производную по времени от кинетической энергии и воспользуемся основными свойствами скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 2\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},\boldsymbol{v}\right) = \\ &= \left(m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},\boldsymbol{v}\right) = (\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}). \end{aligned} \qquad (7)$$

Величина $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v})$ — скалярное произведение силы на скорость точки ее приложения — называется (мгновенной) мощностью. Соотношение (7) показывает, что производная по времени от кинетической энергии равна мгновенной мощности.

Умножая (7) на dt, получим

$$dw = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\,dt) = (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = dA\,, \qquad (8)$$

т. е. изменение кинетической энергии точки за малый промежуток времени равно элементарной работе силы.

Если точка совершает конечное перемещение (см. рис. 1) за конечный интервал времени, то его можно разбить на малые отрезки, на каждом из которых выполняется равенство (8). Складывая изменения dw_i на всех участках, найдем полное изменение кинетической энергии точки, а суммируя элементарные работы, получим полную работу вдоль всей траектории:

$$\Delta w = w_2 - w_1 = \frac{mv_2^2}{2} \quad \frac{mv_1^2}{2} = A_{12}\,. \qquad (9)$$

Соотношение (9) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной (интегральной) форме: *изменение кинетической энергии точки при ее перемещении вдоль некоторой траектории равно работе силы вдоль этой траектории.* Отсюда становится понятным, почему кинетической энергией называется именно величина $\frac{mv^2}{2}$: выбирается такая комбинация характеристик движущейся точки, изменение которой равно как раз работе силы.

Единицей работы (а следовательно, и кинетической энергии) в системе СИ является джоуль (1 Дж = 1 Н·м), а мощности — ватт (1 Вт = = 1 Дж/с).

§ 2.7. Консервативные силы. Потенциальная энергия

Работа силы вдоль какой-либо траектории, как это следует из ее определения (4), зависит, вообще говоря, от длины этой траектории, ее формы и значения вектора $\boldsymbol{F}$ в каждой ее точке (мы рассматриваем стационарные, т. е. не зависящие от времени, силы). Однако существует целый класс сил, работа которых не зависит от формы траектории, соединяющей любые две точки, а определяется только их положением. Конечно, при переходе от траектории M к траектории N

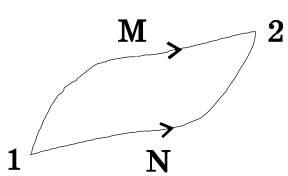

Рис. 2

(рис. 2) и элементарные перемещения $d\boldsymbol{r}_i$, и силы $\boldsymbol{F}_i$, действующие на них, изменятся, но суммы вида (4), т. е. работы для обеих траекторий, останутся неизменными. Такие силы называются консервативными (или потенциальными); их примерами в механике являются силы гравитации и упругости[1]. Примером непотенциальной силы является сила трения.

Итак, силы называются консервативными, если для любых двух точек 1 и 2 и любых траекторий M и N, соединяющих эти точки,

$$A_{1M2} = A_{1N2}. \tag{10}$$

Поскольку $A_{1N2} = -A_{2N1}$, определение *консервативных сил* может быть записано несколько иначе: их *работа вдоль любого замкнутого контура равна нулю:*

$$A_{1M2N1} = 0. \tag{11}$$

Свойство потенциальности силы сильно упрощает вычисление ее работы: вместо заданной траектории можно выбрать более удобную (проходящую через те же начальную и конечную точки) и считать работу на ней. Более того, для каждой пары точек можно один раз вычислить эту работу и приписать ее значение этой паре. Введенная таким образом функция (пар точек) позволяет сразу получить работу консервативной силы при перемещении из одной точки в другую по любой траектории. Можно еще более упростить вычисление этой работы, если одну из точек каждой пары фиксировать и выбрать в качестве "нулевой".

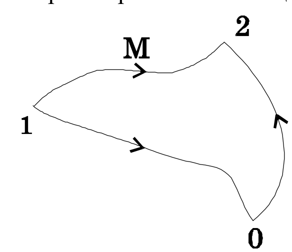

Рис. 3

Итак, рассмотрим какую-либо область пространства, в каждой точке которой действуют потенциальные силы. Примем одну из этих точек за начало отсчета и назовем "нулевой". Работа силы по перемещению из произвольной точки 1 в произвольную точку 2 (рис. 3) по любой траектории ($1M2$) будет равна работе вдоль траектории (102), проходящей через нулевую точку.

[1] Консервативный характер гравитационных сил следует из приводимого в лекции 10 доказательства потенциальности кулоновых сил, ибо математические формулировки законов, лежащих в основе обоих этих типов взаимодействий, идентичны. Из этого доказательства следует также, что любое центральное поле потенциально, а отсюда вытекает и потенциальный характер сил упругости. Рассматривая силы взаимодействия, возникающие между любыми точками деформированного тела, и учитывая, что они действуют *вдоль* линии, соединяющей эти точки, и являются *однозначными* функциями расстояний между ними (упругие деформации!), можно уподобить данные силы центральным и таким образом строго доказать их потенциальность

Эта работа складывается, в свою очередь, из работ вдоль 10 и 02:

$$A_{1M2} = A_{102} = A_{10} + A_{02} . \qquad (12)$$

Но $A_{02} = -A_{20}$, так что

$$A_{12} = A_{10} - A_{20} , \qquad (13)$$

т. е. работа A_{12} вдоль произвольной траектории может быть представлена в виде разности двух однотипных слагаемых A_{10} и A_{20}, которые могут рассматриваться как значения некоторой функции точки. *Функция эта представляет собой работу, совершенную консервативной силой при перемещении из данной точки i в нулевую, и называется потенциальной энергией материальной частицы в данной точке:*

$$u_{\mathrm{i}} = A_{i0}. \qquad (14)$$

Таким образом, потенциальный характер действующих сил позволяет ввести в рассмотрение некую скалярную функцию точки (называемую потенциальной энергией), разность значений которой для двух любых точек 1 и 2 дает работу по перемещению из 1 в 2:

$$\boldsymbol{A}_{12} = u_1 - u_2 . \qquad (15)$$

Выбор начала отсчета потенциальной энергии, влияя на ее значения в каждой точке пространства, никак не скажется на соотношении (15) и потому является до известной степени произвольным.

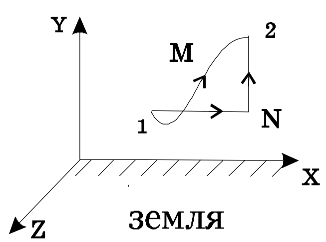

Рис. 4

Пример. Найти потенциальную энергию материальной точки, расположенной вблизи поверхности Земли (т. е. в области, где поле тяжести однородно).

Для решения задачи нужно выбрать две произвольные точки 1 и 2 (рис. 4) и посчитать работу, совершенную силой тяжести при перемещении рассматриваемой частицы из 1 в 2. Поскольку работа эта от формы траектории, соединяющей начальную и конечную точки, не зависит, выберем наиболее удобную кривую, состоящую из горизонтального 1*N* и вертикального *N*2 прямолинейных отрезков. На первом из них работа не совершается (ибо сила перпендикулярна перемещению), а на втором, очевидно, равна

$$A_{N2} = \left(\boldsymbol{F}, \Delta \boldsymbol{r}\right) = -mg\left(y_2 - y_1\right), \qquad (16)$$

где знак минус соответствует противоположным направлениям силы $m\boldsymbol{g}$ и перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$ из N в 2. Этой работе и будет по определению равна разность потенциальных энергий в первой и второй точках:

$$u_1 - u_2 = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2. \tag{17}$$

Таким образом, с точностью до некоторой константы C

$$u(x, y, z) = mgy + C, \tag{18}$$

т. е. искомая функция оказалась зависящей лишь от одной координаты (высоты подъема). Значение постоянной C определяется уровнем, относительно которого отсчитывается высота, и является совершенно произвольным.

Если в области, где действуют внешние стационарные консервативные силы, находится система n невзаимодействующих материальных точек, то *потенциальной энергией U этой системы называется сумма потенциальных энергий всех ее точек:*

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i. \tag{19}$$

Если внешних сил нет, но эти точки взаимодействуют друг с другом (силами гравитации или упругости), то процедура введения потенциальной энергии усложняется. Каждая точка уже не будет двигаться в стационарном внешнем поле сил: это поле будет меняться при движении остальных точек системы. Тем не менее, и в этом случае можно говорить о потенциальной энергии системы. Это *работа, совершенная силами взаимодействия при переходе системы из данного состояния* (характеризующегося определенным взаимным расположением частиц) в *"нулевое"*, потенциальная энергия которого принята равной нулю. Можно показать[1], что работа эта не зависит (если силами взаимодействия являются силы гравитации или упругости) от тех траекторий, по которым двигались материальные точки при переходе системы из одного состояния в другое, а определяется лишь начальной и конечной конфигурациями системы. Обычно (но не всегда) за нулевую точку выбирают такое состояние системы, при котором все ее частицы удалены друг от друга на бесконечность.

§ 2.8. Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим систему материальных точек, которые взаимодействуют как друг с другом, так и с внешними телами. Силы, действующие на каж-

---

[1] См. лекцию 12, где такое доказательство проводится для случая кулоновских сил.

дую точку, разобьем на три группы:

1) внутренние консервативные;

2) внутренние неконсервативные;

3) внешние.

Пусть за конечный (или элементарный) промежуток времени система перешла из состояния 1 в состояние 2. При этом каждая ее точка совершила определенное перемещение, двигаясь под действием перечисленных выше сил. По теореме об изменении кинетической энергии точки

$$\Delta w_i = \Delta\left(\frac{mv_i^2}{2}\right) = A_{i\,кон}^{внут} + A_{i\,некон}^{внут} + A_i^{внеш}, \qquad (20)$$

где правая часть представляет собой сумму работ соответственно внутренних консервативных, внутренних неконсервативных и внешних сил над движущейся точкой.

Просуммируем выражения типа (20) по всем точкам системы. Слева получим изменение кинетической энергии системы ΔW , справа — сумму работ рассматриваемых сил уже над всеми точками системы:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{кон}^{внут} + A_{некон}^{внут} + A^{внеш} \; . \qquad (21)$$

Но работу внутренних консервативных сил можно выразить через разность потенциальных энергий системы в состояниях 1 и 2:

$$A_{кон}^{внут} = U_1 - U_2 \, . \qquad (22)$$

Перенося ее в левую часть, получим

$$W_2 - W_1 + U_2 - U_1 = (W_2 + U_2) - (W_1 + U_1) = \Delta(W + U) = A_{некон}^{внут} + A^{внеш} . \qquad (23)$$

Величина $E = W + U$ называется полной механической (или просто механической) энергией системы, а выражение (23) показывает, что ее изменение равно сумме работ внутренних неконсервативных и внешних сил. Из него нетрудно получить условие, при котором энергия сохраняется (закон сохранения энергии):

$$\Delta E = \Delta(W + U) = 0, \qquad (24)$$

или

$$W + U = const, \qquad (24')$$

если

$$A^{внут}_{некон} + A^{внеш} = 0 . \qquad (25)$$

Поскольку условие (25) должно выполняться для произвольной траектории каждой точки системы, из него вытекает равенство нулю геометрической суммы приложенных к ней внутренней неконсервативной и внешней сил, а так как внутренние силы зависят от взаимного положения частиц, а внешние — нет, то отсюда следует равенство нулю каждой силы в отдельности[1].

Таким образом, закон сохранения энергии можно сформулировать в следующей форме: *полная механическая энергия системы сохраняется, если выполняются два условия:*

1) *система замкнута* (нет внешних сил);

2) *система консервативна* (отсутствуют неконсервативные силы).

В отличие от импульса, который сохраняется в любой замкнутой системе, для сохранения энергии необходимо еще отсутствие неконсервативных сил. Откуда возникает это дополнительное условие? Ведь неконсервативные силы, конечно, удовлетворяют III закону Ньютона, и каждой внутренней силе найдется противодействующая. Почему же их работы взаимно не уничтожаются? Связано это с тем, что за равные промежутки времени взаимодействующие точки системы совершают разные перемещения (причем не только по величине, но и по направлению) и работа сил их взаимодействия оказывается отличной от нуля.

В качестве примера рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух одинаковых пластилиновых шариков, летящих навстречу друг другу с равными скоростями. Испытав центральный удар, оба они остановятся, и их кинетическая энергия "исчезнет" (разумеется, исчезнет она только из сферы механической, перейдя в энергию внутреннюю). Потеря механической энергии обусловлена здесь действием непотенциальных сил неупругого соударения. Что же касается импульса, то он как был до столкновения равен нулю (векторная сумма!), так и остался нулевым после него, т. е. сохранился.

В тех ситуациях, когда характер внешних сил нам известен и среди них есть консервативные (обычно это силы тяжести со стороны Земли, которая не включена в рассматриваемую систему), нет смысла разбивать их на внутренние и внешние. Как следует из нашего рассмотрения, обе эти кате-

---

[1] Строго говоря, это достаточные условия сохранения механической энергии. Бывают ситуации, когда диссипативные (т. е. неконсервативные) силы есть, а механическая энергия сохраняется (например шарик, катающийся без проскальзывания по дну сферической чаши). Необходимыми и достаточными условиями являются лишь равенства нулю работ внутренних диссипативных и внешних сил. Эти условия, однако, оказываются гораздо менее универсальными по применимости, ибо требуют в каждом конкретном случае рассмотрения всевозможных траекторий и работ по ним (обязательно равных нулю!) диссипативных сил.

гории сил совершенно равноправны и существенной оказывается лишь их потенциальность (или непотенциальность). В этом случае, очевидно, *изменение полной механической энергии системы равно* просто *сумме работ всех неконсервативных сил.* При этом, конечно, потенциальная энергия системы определяется из работы не только внутренних, но и внешних консервативных сил.

В заключение сделаем два ***замечания***.

1. Мы доказали законы сохранения импульса и энергии, получив их из законов Ньютона. На самом деле они являются более общими принципами и сфера их действия гораздо шире ньютоновой механики.

2. Рассматривая и доказывая законы сохранения, мы фактически искали комбинации кинематических и динамических характеристик, которые при определенных условиях сохраняются. Мы заметили, что если для каждой точки системы построить вектор $m_i\boldsymbol{v}_i$ и сложить их все, то в замкнутой системе эта сумма сохраняется. Мы назвали этот вектор импульсом. Там же "всплыла" другая комбинация — $\dfrac{\Sigma m_i\boldsymbol{r}_i}{\Sigma m_i}$. Оказывается, что точка, радиус-вектор которой определяется этим выражением, движется по очень простому закону, а если система замкнута — равномерно и прямолинейно. Мы назвали ее центром масс.

Сейчас мы обнаружили взаимосвязь новых комбинаций: $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ и $(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r})$. Мы нашли, что $\Delta\left(\dfrac{m\upsilon^2}{2}\right) = \Sigma\left(\boldsymbol{F}_i, d\boldsymbol{r}_i\right)$, причем для определенного класса сил эта сумма очень просто вычисляется путем введения некой скалярной функции (это справедливо и для точки, и для системы материальных точек). Функцию мы назвали потенциальной энергией, а введенные величины — соответственно кинетической энергией и работой. Мы увидели далее, что в замкнутых и консервативных системах сумма кинетической и потенциальной энергий сохраняется.

Можно из двух векторов $\boldsymbol{r}$ и $m\boldsymbol{v}$ сконструировать по определенным правилам третий (его называют моментом импульса) и получить условие, при котором он сохраняется, и т. д.

В дальнейшем вы увидите, что изучение физики вообще в значительной степени сводится к построению тех или иных комбинаций различных величин и выяснению условий, при которых эти комбинации сохраняются.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется элементарной работой силы? Работой силы на конечном перемещении? Перемещение какой точки тела входит в эти определения? Работа это вектор или скаляр, арифметическая (всегда положительная) или алгебраическая (могущая быть отрицательной) величина?

2. Дать определение кинетической энергии точки и системы материальных точек. Это вектор или скаляр, арифметическая или алгебраическая величина?

3. Сформулировать и доказать теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Что называется мгновенной мощностью?

4. В каких единицах в системе СИ измеряются работа, кинетическая энергия и мощность?

5. От чего зависит работа силы вдоль траектории, соединяющей две заданные токи, если сила:

а) неконсервативна;

б) консервативна?

6. Дать определение потенциальной энергии частицы, находящейся в данной точке пространства.

7. Можно ли определить потенциальную энергию частицы, подверженной действию силы сухого трения? Если да, то, например, как, если нет — почему?

8. Дать определения потенциальной энергии системы невзаимодействующих и взаимодействующих материальных точек.

9. Сформулировать и «доказать» закон сохранения механической энергии для следующих случаев:

а) характер внешних сил не известен;

б) внешние силы известны и консервативны.