Лекция 1

Часть I. МЕХАНИКА НЬЮТОНА

Глава 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1.1. Измерение длин и времен. Система отсчета

Изучение механики — науки о перемещении тел или частей тела друг относительно друга — мы начнем со знакомства с ее простейшим разделом — кинематикой. Кинематика рассматривает движение с геометрической точки зрения, не анализируя причин (т. е. сил), придающих ему тот или иной характер. От геометрии она отличается, по существу, лишь необходимостью учета времени.

Понятия пространства и времени, используемые для описания движения, являются весьма сложными по своему смыслу и не поддаются определению через другие более простые понятия. Однако все мы интуитивно представляем, что это такое: ведь в значительной степени суть этих понятий содержится в самой процедуре их измерения, а с этой процедурой мы хорошо знакомы из повседневного опыта. В механике Ньютона метрические свойства пространства и времени считаются абсолютными, не зависящими друг от друга и от движения наблюдателя, производящего измерения[1].

Как же практически определяются длины отрезков и длительности временны́х интервалов? По принципу, лежащему в основе многих измерений в физике: путем сравнения с установленной единицей. Для нахождения длины какого-либо отрезка нужно взять единицу длины и посмотреть, сколько раз она (или какая-либо известная ее часть) содержится в этом отрезке. Аналогично мерится и время, хотя его измерение и имеет свою специфику: один и тот же интервал нельзя измерить дважды и одну и ту же "единицу времени" нельзя (как единицу длины) "прикладывать" к различным частям измеряемого интервала, чтобы узнать, сколько раз она в нем содержится. Поэтому приходится использовать много одинаковых временны́х единиц, вплотную примыкающих друг к другу и целиком заполняющих рассматриваемый отрезок времени. Такой последовательностью единиц может слу-

[1] Такая ситуация, однако, как показывают специальные, более тонкие, эксперименты, остается справедливой не всегда, а имеет место лишь при описании объектов, движущихся со скоростями, много меньшими скорости света. В общем случае движения с произвольными скоростями рассматриваемые понятия оказываются уже связанными и предстают перед нами в виде единой категории пространства-времени. Это означает, что результаты измерений длин и времен, проведенных в разных системах отсчета, получаются, вообще говоря, различными, причем при переходе из одной системы в другую они преобразуются по определенным законам.

жить какой-либо периодический процесс, т. е. процесс, при котором измерительное устройство в точности повторяет раз за разом одинаковые движения. Число единиц-периодов, укладывающихся на определенном интервале, и называется его длительностью[1].

Одним из центральных вопросов метрологии — науки об измерениях — является вопрос выбора и воспроизведения эталонов длины и времени. До сравнительно недавнего времени (еще несколько десятилетий назад) эталоны эти связывались с протяженностью определенного (Парижского) меридиана земного шара[2] и длительностью суточного вращения Земли. В настоящее время приняты новые, значительно более стабильные и достаточно легко воспроизводимые эталоны (равные с максимально достижимой сегодня точностью старым, величины которых на текущий момент и были зафиксированы новыми стандартами). Сейчас метр, служащий эталоном длины (и являющийся одновременно ее единицей в системе СИ) — это длина пути, проходимого светом в вакууме за строго определенное время. Эталон же времени — секунда (одновременно и единица времени в СИ) — это интервал, равный заданному числу периодов излучения атома цезия-133 тоже при фиксированных условиях.

Для описания движения тел мало уметь измерять расстояния и времена. Нужно знать еще, от какого момента следует отсчитывать время и от какой точки (или каких точек) и куда — расстояния. Другими словами, любое движение должно рассматриваться в определенной *системе отсчета*. Под системой отсчета мы понимаем произвольно выбранное твердое тело — так называемое тело отсчета[3], связанную с этим телом систему координат и прибор для измерения времени — "часы". Задание системы координат предполагает выбор тех величин, которыми определяется положение тела в пространстве, а также указание того, откуда и как их откладывать. Наиболее распространенной является декартова система координат, однако существуют и другие (например цилиндрическая, сферическая и проч.). Часы должны показывать время тоже относительно начала отсчета.

В различных системах отсчета одно и то же движение может выглядеть

---

[1] Наряду с рассмотренными прямыми, или непосредственными, методами измерения длин и времен на практике часто используются косвенные, когда измеряется не сама исследуемая величина, а другая, связанная с ней определенной функциональной зависимостью. Из результатов этих измерений искомая величина уже *вычисляется* по известным формулам (например радиолокационный способ определения расстояний, метод измерения больших времен на основе закона радиоактивного распада и т. п.). Мы, однако, на таких способах останавливаться не будем.

[2] Точнее, эталоном длины служил образец, изготовленный во Франции по результатам измерения длины меридиана (как одна сорокамиллионная его часть). Позже выяснилось, что этот образец не совсем точен, однако он все же был оставлен в качестве эталона.

[3] Тело отсчета должно быть твердым для того, чтобы с ним можно было жестко связать координатную систему.

совершенно по-разному. Например, брошенный вертикально вверх с палубы равномерно плывущего корабля мяч движется относительно палубы по прямой, в то время как наблюдателю, стоящему на берегу, это движение представится уже криволинейным. Если этот наблюдатель сядет еще и во вращающуюся карусель и свяжет с ней координатную систему, то в этой системе движение мяча еще более усложнится. В каждом конкретном случае, конечно, нужно выбирать такую систему отсчета, в которой рассматриваемое явление выглядит наиболее просто. Это единственный критерий выбора системы отсчета в кинематике. Никаких принципиальных преимуществ здесь у одной системы перед другой (в отличие от динамики) не существует. Связано это с тем обстоятельством, что все "законы" кинематики исчерпываются процедурами измерения длин и времен, а процедуры эти (по определению) совершенно одинаковы в любой системе отсчета. Именно поэтому все они и оказываются абсолютно равноправными.

Как же в самом общем случае описать движение окружающих нас объектов, которые могут иметь очень сложное строение и двигаться весьма разнообразно? Для такого описания поступают следующим образом: разбивают исследуемое тело на малые элементы и следят за перемещениями каждого из них. Элементы эти должны быть настолько малыми, чтобы все частицы любого из них двигались одинаково в пределах заданной точности. Размеры и форма такого элемента оказываются при этом уже несущественными, ибо движение его полностью определяется движением какой-либо одной его точки. Такие элементы называются материальными точками[1]. Например, соскальзывающий с треугольной призмы (наклонной плоскости) брусок можно считать материальной точкой, а скатывающийся с нее цилиндр, каким бы малым он ни был по сравнению с призмой, — нельзя: благодаря вращению различные части цилиндра движутся существенно поразному и это сказывается на движении его центра.

Понятие материальной точки является весьма важным в механике, ибо, с одной стороны, выделяет перед нами простейшие объекты для исследования, с другой — определяет "универсальные" элементы, из совокупности которых может быть составлена любая сколь угодно сложная система. Итак, для описания движения произвольного набора объектов, в принципе, достаточно уметь описывать движение материальной точки.

§ 1.2. Способы задания движения точки

Задать движение точки — означает задать ее положение в каждый момент времени. Положение это должно определяться, как уже отмечалось, в какой-либо системе координат. Однако для этого не обязательно всегда

[1] В кинематике "материальность" точки, т. е. наличие у нее массы, несущественна и она может рассматриваться как точка геометрическая.

задавать сами координаты; можно использовать величины, так или иначе с ними связанные. Ниже описаны три основных способа задания движения точки.

1. *Естественный способ***.** Этим способом пользуются, если известна траектория движения точки. Траекторией называется совокупность точек пространства, через которые проходит движущаяся материальная частица. Это линия, которую она вычерчивает в пространстве. При естественном способе необходимо задать (рис. 1):

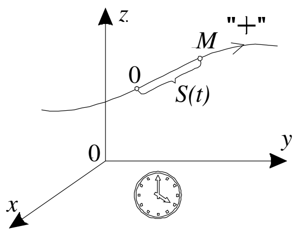


Рис. 1

а) траекторию движения (относительно какой-либо системы координат);

б) произвольную точку на ней — нуль, от которого отсчитывают расстояние S до движущейся частицы вдоль траектории;

в) положительное направление отсчета S (при смещении точки M в противоположном направлении S отрицательно);

г) начало отсчета времени t;

д) функцию $S(t)$, которая называется законом движения[1] точки.

2. *Координатный способ***.** Это наиболее универсальный и исчерпывающий способ описания движения. Он предполагает задание:

а) системы координат (не обязательно декартовой) q_1, q_2, q_3;

б) начало отсчета времени t;

в) закона движения точки, т. е. функций $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Говоря о координатах точки, мы всегда будем иметь в виду (если не оговорено противное) ее декартовы координаты.

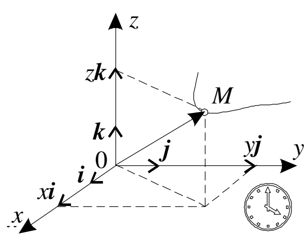


Рис. 2

3. *Векторный способ***.** Положение точки в пространстве может быть определено также и радиус-вектором, проведенным из некоторого начала в данную точку (рис. 2). В этом случае для описания движения необходимо задать:

а) начало отсчета радиус-вектора $\boldsymbol{r}$;

б) начало отсчета времени t;

в) закон движения точки $\boldsymbol{r}(t)$.

Поскольку задание одной векторной величины $\boldsymbol{r}$ эквивалентно заданию трех ее проекций x, y, z на оси координат, от векторного способа легко перейти к координатному. Если ввести единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ($|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = \; = |\boldsymbol{k}| = 1$), направленные соответственно вдоль осей x, y и z (рис. 2), то, очевидно,

[1] Здесь имеется в виду кинематический закон движения. Его не следует путать с законами движения, изучаемыми в динамике (см. ниже).

закон движения может быть представлен в виде[1]

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

Преимущество векторной формы записи перед координатной — в компактности (вместо трех величин оперируют с одной) и часто в большей наглядности.

Пример. На неподвижную проволочную полуокружность надето маленькое колечко M, через которое проходит еще прямолинейный прут AB (рис. 3), равномерно вращающийся вокруг точки A ($\varphi = \omega t$, где $\omega = const$). Найти законы движения колечка M вдоль стержня AB и относительно полуокружности.

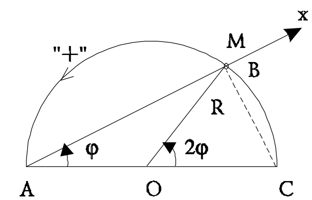


Рис. 3

Для решения первой части задачи воспользуемся координатным способом, направив ось x декартовой системы вдоль стержня и выбрав ее начало в точке A. Поскольку вписанный $\angle AMC$ прямой (как опирающийся на диаметр),

$$x(t) = AM = 2R\cos\varphi = 2R\cos\omega t,$$

где R — радиус полуокружности. Полученный закон движения называется гармоническим колебанием (колебание это будет продолжаться, очевидно, лишь до того момента, пока колечко не дойдет до точки A).

Вторую часть задачи будем решать, используя естественный способ. Выберем положительное направление отсчета расстояния вдоль траектории (полуокружности AC) против часовой стрелки (рис. 3), а нуль — совпадающим с точкой C. Тогда длина дуги CM как функция времени даст закон движения точки M

$$S(t) = R2\varphi = 2R\omega t,$$

т. е. колечко будет равномерно двигаться по окружности радиусом R с угловой скоростью 2ω. Как явствует из проведенного рассмотрения, нуль отсчета времени в обоих случаях соответствовал моменту, когда колечко находилось в точке C.

§ 1.3. Криволинейное движение точки

1. Основные понятия. Введем основные кинематические характеристики движения точки, рассматривая сразу ее криволинейное, т. е. происходящее по криволинейной траектории, движение. Аналогичные характеристики более простого прямолинейного движения будут вытекать из нашего рассмотрения как частные случаи.

---

[1] Напомним, что *числа* x, y и z называются проекциями радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ на соответствующие оси координат, а *векторы* $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ - его составляющими вдоль этих осей.

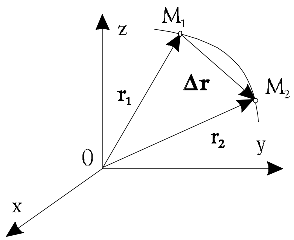


Рис. 4

Рассмотрим два положения движущейся точки, разделенные некоторым конечным интервалом времени Δt (рис. 4). Пусть в момент t_1 она занимала положение M_1, определяемое радиус-вектором $\boldsymbol{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$, а в момент t_2 — положение M_2, задаваемое радиус-вектором $\boldsymbol{r}_2\{x_2, y_2, z_2\}$ (в фигурных скобках после обозначения вектора мы, когда это необходимо, будем указывать его проекции на оси координат). Вектор

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \qquad (2)$$

называется вектором перемещения или просто перемещением точки за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Отношение перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$ к промежутку времени Δt, за которое это перемещение произошло, называется вектором средней скорости $\boldsymbol{v}_{cp}$ в течение интервала Δt:

$$\boldsymbol{v}_{cp} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1}. \qquad (3)$$

Вектор этот имеет, очевидно, то же направление, что и $\Delta\boldsymbol{r}$, и величину, выраженную в других единицах. При уменьшении интервала времени Δt (и фиксированном значении t_1) точка M_2 будет неограниченно приближаться к M_1. При этом вектор $\Delta\boldsymbol{r}$ будет тоже уменьшаться по величине, а направление его все ближе подходить к направлению касательной к траектории в точке M_1. Вектор

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad (4)$$

т. е. предел, к которому стремится вектор средней скорости при $\Delta t \to 0$, называется мгновенной скоростью или просто скоростью точки в момент t_1. Это производная радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ по времени t. Она направлена по касательной к траектории в сторону движения точки. Здесь использована одна из общепринятых форм записи производных в виде отношения бесконечно малого приращения $d\boldsymbol{r}$ функции (в данном случае векторной) к бесконечно малому приращению аргумента dt.

Соотношения (2) — (4) могут быть написаны в проекциях на оси координат (т. е. вместо каждого из них представлены по три их проекции). Например, из (2) и (4) следует

$$\Delta r_x = x_2 - x_1 = \Delta x,$$

ибо, очевидно, проекция разности двух векторов равна разности их проекций,

$$\upsilon_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} \equiv x' \equiv \dot{x}.$$

Таким образом, проекция скорости движущейся точки на какую-либо из осей (например x) равна производной соответствующей координаты по времени (производные по времени первого, второго и т. д. порядков чаще обозначают не штрихами рядом с буквой, а точками над ней).

Под путем, пройденным точкой за время Δt, понимают длину траектории (описанной ей за это время), отсчитанную *в направлении движения* точки. Если в каких-то местах траектории точка останавливалась и меняла направление движения на противоположное, то для расчета пути нужно разбить траекторию на участки, где точка двигалась без остановок, и сложить их длины. Таким образом, с течением времени путь может только нарастать.

Если разделить пройденный путь Δl на интервал времени Δt, то получим средний модуль скорости $|\boldsymbol{\upsilon}|_{ср}$ в течение этого интервала:

$$|\boldsymbol{\upsilon}|_{ср} = \frac{\Delta l}{\Delta t}. \tag{5}$$

Вектор средней скорости (3) и средний модуль скорости (5) — совершенно различные характеристики движения. Первая указывает направление перемещения точки и по величине может принимать любые, в том числе и нулевые, значения. Вторая не имеет направления, характеризует пройденный путь и всегда положительна.

Пример. Маленький шарик, висящий на нерастяжимой нити, отклонили от положения равновесия на некоторый угол и отпустили без начальной скорости (рис. 5). Пройдя положение равновесия и отклонившись в другую сторону, он через некоторое время (период) T снова придет в исходное состояние и далее многократно будет повторять описанное движение. Найти вектор перемещения и пройденный путь за время $\frac{3}{2}T$, а также вектор средней скорости и средний модуль скорости в течение интервала $4T$.

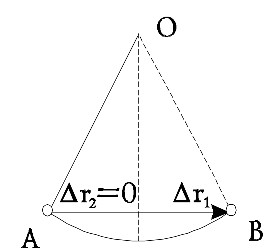


Рис. 5

Из соображений симметрии понятно, что через время $\frac{3}{2}T$ шарик будет в положении B. Вектор, соединяющий начальную и конечную точки, и будет перемещением шарика за время $\frac{3}{2}T$:

$$\Delta \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{AB}.$$

При расчете пути необходимо принять во внимание, что за время движения шарик дважды остановится (через время $\frac{T}{2}$ в точке B и еще через $\frac{T}{2}$ в точке A), разбивая траекторию на три равных участка, накладывающихся друг на друга. Стало быть, длина пути Δl_1 равна утроенной длине такого участка, т. е.

$$\Delta l_1 = 3\Delta l_0,$$

где Δl_0 — длина дуги AB.

Для решения второй части задачи учтем, что через время $4T$ шарик вернется в положение A. Следовательно, векторы перемещения и средней скорости будут равны нулю:

$$\Delta r_2 = 0, \quad \upsilon_{cp} = 0.$$

Пройденный за это время путь Δl_2, очевидно, равен длине дуги AB, умноженной на число полупериодов $\frac{T}{2}$ в рассматриваемом интервале $4T$, так что средний модуль скорости

$$\left|\boldsymbol{\upsilon}\right|_{cp} = \frac{8\Delta l_0}{4T} = \frac{2\Delta l_0}{T}.$$

Наиболее полно движение точки характеризует, конечно, ее мгновенная скорость $\boldsymbol{\upsilon}$, заданная в любой момент времени. Если она постоянна по величине и направлению, то такое движение называется равномерным прямолинейным. Если $\boldsymbol{\upsilon}$ меняется, то движение называется ускоренным. Изменение вектора $\boldsymbol{\upsilon}$ за какой-либо интервал времени Δt характеризуют средним ускорением $\boldsymbol{a}_{cp}$ в течение этого интервала.

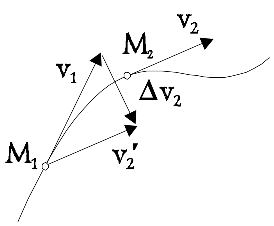


Рис. 6

Пусть $\boldsymbol{\upsilon}_1$ — скорость точки в момент t_1, а $\boldsymbol{\upsilon}_2$ — в момент t_2 (рис. 6). Вектор

$$\boldsymbol{a}_{cp} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}, \qquad (6)$$

называется средним ускорением точки за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Напомним, что для построения разности двух векторов $\boldsymbol{\upsilon}_2$ и $\boldsymbol{\upsilon}_1$, выходящих не из одной точки, нужно предварительно совместить их начала, например, перенеся, как это сделано на рис. 6, вектор $\boldsymbol{\upsilon}_2$ в точку M_1 (сохраняя, конечно, его величину и направление): $\boldsymbol{\upsilon}'_2 = \boldsymbol{\upsilon}_2$.

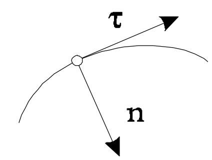
Переходя в (6) к пределу при $\Delta t \to 0$ (т. е. поступая так же, как при определении мгновенной скорости), получим мгновенное ускорение (или просто ускорение)

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \qquad (7)$$

характеризующее движение точки в какой-то момент времени. Вектор $\boldsymbol{a}$ может быть, конечно, представлен и тремя своими проекциями на оси координат:

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y},\ a_z = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}. \qquad (8)$$

А как он ориентирован относительно траектории движения? Мгновенная скорость, как мы видели, всегда направлена по касательной к ней. Понятно, что для ответа на поставленный вопрос одного вида траектории мало: в общем случае ускорение не будет совпадать по направлению с касательной к траектории и наряду с продольной составляющей, учитывающей изменение вектора $\boldsymbol{v}$ по величине, будет иметь поперечную, характеризующую скорость его поворота. Если ввести единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$, направленные соответственно вдоль скорости и перпендикулярно к ней в сторону ее поворота (рис.7), то вектор $\boldsymbol{a}$, очевидно, можно представить в виде



$|\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{n}| = 1$

Рис. 7

$$\boldsymbol{a} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \boldsymbol{n}, \qquad (9)$$

где $a_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \upsilon_\tau}{\Delta t}$ и $a_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \upsilon_n}{\Delta t}$ — так называемые тангенциальная и нормальная проекции ускорения, а $\Delta\upsilon_\tau$ и $\Delta\upsilon_n$ — проекции вектора приращения скорости на те же направления $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$. Найдем a_τ и a_n.

2. Тангенциальное и нормальное ускорения. Рассмотрим участок траектории движущейся точки и какие-либо два ее положения M_1 и M_2, разделенные малым интервалом времени (рис.8, а). Пусть в положении M_1, соответствующем моменту t_1, скорость точки равна $\boldsymbol{v}_1$, а в положении M_2 — $\boldsymbol{v}_2$. Построим вектор $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ (как это мы делали при определении среднего ускорения) и найдем его проекции Δ

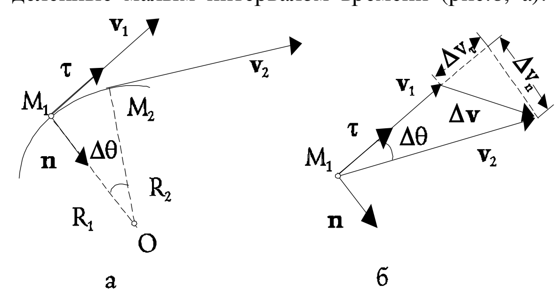


Рис. 8

υ_τ и $\Delta\upsilon_n$ на тангенциальное и нормальное направления, задаваемые векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$, проведенными через точку M_1 (рис. 8, б):

$$\Delta\upsilon_\tau = |\boldsymbol{\upsilon}_2|\cos\Delta\theta - |\boldsymbol{\upsilon}_1| \cong |\boldsymbol{\upsilon}_2| - |\boldsymbol{\upsilon}_1|,$$

$$\Delta\upsilon_n = |\boldsymbol{\upsilon}_2|\sin\Delta\theta \cong |\boldsymbol{\upsilon}_2|\Delta\theta,$$

где $\Delta\theta$ — угол между $\boldsymbol{\upsilon}_1$ и $\boldsymbol{\upsilon}_2$ (мы учитываем, что угол этот мал, так что $\cos\Delta\theta \cong 1$, а $\sin\Delta\theta \cong \Delta\theta$).Если восставить в точках M_1 и M_2 перпендикуляры к траектории, то они, очевидно, пересекутся под тем же углом $\Delta\theta$ (рис. 8, а).

Разделим теперь написанные выражения на интервал Δt и устремим его к нулю (зафиксировав момент t_1). При этом и $\Delta\theta \to 0$, так что

$$a_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\upsilon_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol{\upsilon}_2| - |\boldsymbol{\upsilon}_1|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta|\boldsymbol{\upsilon}|}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}, \tag{10}$$

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\upsilon_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol{\upsilon}_2|\Delta\theta}{\Delta t}\ ^{1}.$$

Для отыскания последнего предела учтем, что при неограниченном уменьшении угла $\Delta\theta$ длины отрезков M_1O и M_2O (рис. 8, а) будут, сближаясь, стремиться к некоторому значению R, которое называется *радиусом кривизны* траектории в точке M_1. В пределе бесконечно малый участок кривой M_1M_2 сольется с дугой окружности радиусом R и, следовательно, длина этого участка может быть выражена формулой $\Delta s \cong R\Delta\theta$. Одновременно скорость $\boldsymbol{\upsilon}_2$ будет тоже неограниченно приближаться к $\boldsymbol{\upsilon}_1$, т. е.

$$\upsilon_2 \cong \upsilon_1 \equiv \upsilon = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot$$

Таким образом,

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol{\upsilon}_2|\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol{\upsilon}_2|\Delta s}{R\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}\cdot \tag{11}$$

Итак, при движении точки по произвольной кривой ее ускорение всегда может быть представлено в виде суммы двух составляющих — тангенциальной и нормальной:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\boldsymbol{n}. \tag{12}$$

Первая направлена по касательной к траектории и по величине определяется производной модуля скорости по времени (если скорость убывает, то

[1] Наряду с обычной формой записи модуля какого-либо вектора $|\boldsymbol{c}|$ мы будем использовать более компактную: $c \equiv |\boldsymbol{c}|$.

$\frac{d\upsilon}{dt} < 0$ и тангенциальное ускорение направлено навстречу скорости). Вторая ориентирована перпендикулярно к траектории в направлении ее «загиба» (в сторону вогнутости) и зависит от величины скорости и радиуса кривизны траектории. Чем больше скорость точки и кривизна ее траектории, тем, очевидно, быстрее меняется скорость по направлению и, следовательно, больше нормальное ускорение.

Замечание. В проведенном анализе мы неявно предполагали, что рассматриваемый участок траектории является плоским, т. е. целиком лежит в плоскости рисунка. Возникает вопрос, а не будет ли в общем случае пространственной кривой (например винтовой линии) ускорение содержать еще одну составляющую, перпендикулярную плоскости ($\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\tau}$). Нетрудно понять, однако, что такой составляющей не будет. Надо только из всех плоскостей, проходящих через касательную к кривой в данной точке, выбрать ту, в которой лежит бесконечно малый элемент этой кривой. Для этого достаточно провести плоскость через три бесконечно близкие точки траектории. В ней рассматриваемый участок можно считать плоским, и наш анализ остается в силе (так происходит потому, что все его результаты получены путем предельного перехода при стягивании отрезка кривой к точке). Таким образом, проведенное рассмотрение оказывается справедливым в самом общем случае.

Пример 1. **Прямолинейное движение точки.** Радиус кривизны прямолинейной траектории $R \to \infty$, а потому нормальное ускорение здесь отсутствует. Тангенциальное же, вообще говоря, отлично от нуля и в зависимости от того, увеличивается или уменьшается скорость по модулю, направлено вдоль скорости движения тела или навстречу ей. Если ускорение постоянно, то говорят, что точка движется равноускоренно. Найдем для этого случая вектор мгновенной скорости $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ и закон движения точки.

Направим одну из осей системы координат (например x) вдоль траектории; тогда движения вдоль других происходить не будет, т. е.

$$a_y = a_z = 0,\ \upsilon_y = \upsilon_z = 0,\ y = z = 0.$$

Пусть ускорение вдоль x равно $a_x = const$. Поскольку ускорение есть производная скорости по времени: $a_x = \dot{\upsilon}_x$, для отыскания скорости нужно найти такую функцию времени, производная которой постоянна. Это, очевидно, линейная функция

$$\upsilon_x(t) = a_x t + C\ ,$$

где C — некая константа (при любом значении C $\dot{\upsilon}_x = a_x$). Смысл ее может быть найден, если положить $t = 0$: $\upsilon_x(0) = C$. Таким образом,

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t\,, \tag{13}$$

где $\upsilon_{0x} = \upsilon_x(0)$ — начальная скорость точки. Итак, вектор мгновенной скорости $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ направлен вдоль (или навстречу) оси x, и проекция его на эту ось линейно меняется со временем.

Для получения закона движения $x(t)$ вспомним, что найденная нами скорость, в свою очередь, является производной координаты по времени. Однако теперь эта производная уже не постоянна, а линейно зависит от времени. Тем не менее и здесь нетрудно подобрать функцию, имеющую заданную производную: константа в (13) дает линейный член по t, а линейная составляющая — квадратичный. Кроме того, появится еще произвольная постоянная D, которая при дифференцировании исчезнет. Стало быть,

$$x(t) = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} + D\,.$$

Полагая, как и выше, $t = 0$, находим смысл константы D: $x(0) = D$. Окончательно

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}\,, \tag{14}$$

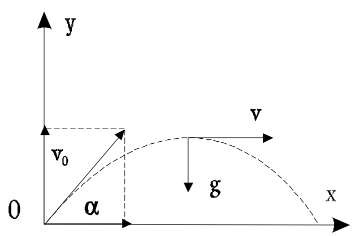


Рис. 9

где x_0 — начальная координата точки. Закон ее движения вдоль оси x — квадратичная функция времени.

Пример 2. Тело брошено под углом α к горизонту с некоторой начальной скоростью $\boldsymbol{\upsilon}_0$ (рис. 9). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти радиус кривизны R его траектории в верхней точке.

Расположим оси координат, как показано на рис. 9, и разложим скорость на две составляющие: горизонтальную и вертикальную. Далее воспользуемся известным из динамики фактом, что движение вблизи поверхности Земли происходит с постоянным ускорением $\boldsymbol{g}$, направленным вертикально вниз. Это значит, что горизонтальная проекция скорости сохраняется, а вертикальная меняется в соответствии с (13) по линейному закону. В верхней точке $\upsilon_y = 0$, $\upsilon_x = \upsilon_0\cos\alpha$ и вектор скорости горизонтален. Следовательно, ускорение $\boldsymbol{g}$ в этой точке перпендикулярно траектории и, таким образом, является нормальным ускорением. Из (11)

$$g = \frac{\upsilon_x^2}{R} = \frac{\upsilon_0^2\cos^2\alpha}{R}\,,$$

откуда

$$R = \frac{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}{g}\cdot$$

§ 1.4. Теорема о сложении скоростей

Как уже отмечалось, одно и то же движение в различных системах отсчета может выглядеть совершенно по-разному. Для описания движения часто необходимо бывает знать, как при переходе из одной системы в другую меняется мгновенная скорость точки. Правило это и представляет собой содержание так называемой теоремы о сложении скоростей.

Итак, рассмотрим две системы отсчета P и Q, произвольно движущиеся относительно друг друга. Примем условно одну из них, например P, за неподвижную и назовем лабораторной системой, а другую — Q, будем считать движущейся. Пусть в подвижной системе точка имеет некую мгновенную скорость, которую назовем относительной скоростью и обозначим как $\boldsymbol{\upsilon}_{отн}$. Чему будет равна ее скорость в лабораторной системе (так называемая абсолютная скорость) $\boldsymbol{\upsilon}_{абс}$, если известно, как движется в данный момент подвижная система относительно неподвижной?

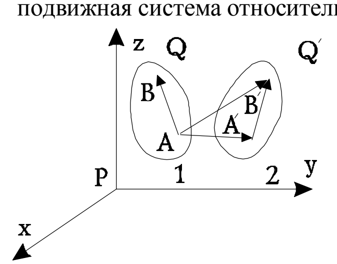


Рис. 10

Для ответа на этот вопрос нарисуем два положения 1 и 2 системы Q и точки в ней, разделенные малым интервалом времени Δt (рис. 10; чтобы не загромождать рисунок, на нем изображено лишь тело отсчета системы Q). Здесь $\boldsymbol{AB} = \Delta\boldsymbol{r}_{отн}$ — вектор относительного перемещения точки за время Δt в системе Q. $\boldsymbol{AA'}$— перемещение той точки подвижной системы (относительно лабораторной), с которой совпадает в данный момент движущаяся частица; оно называется переносным перемещением и обозначается как $\Delta\boldsymbol{r}_{пер}$. И наконец, $\boldsymbol{AB'} = \Delta\boldsymbol{r}_{абс}$ — абсолютное перемещение точки в системе P. Из рис. 10, очевидно, $\Delta\boldsymbol{r}_{абс} = \Delta\boldsymbol{r}_{пер} + \boldsymbol{A'B'}$**.** Разделим теперь это соотношение на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. При этом по определению скорости

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_{абс}}{\Delta t} \equiv \boldsymbol{\upsilon}_{абс}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_{пер}}{\Delta t} \equiv \boldsymbol{\upsilon}_{пер}, \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{\upsilon}_{пер}$ — так называемая переносная скорость. Что же касается перемещения $\boldsymbol{A'B'}$**,** то нетрудно видеть, что при безграничном уменьшении Δt положение 2 системы Q сколь угодно близко подходит к положению 1, а потому вектор $\boldsymbol{A'B'}$ (уменьшаясь по величине) стремится совпасть с вектором $\boldsymbol{AB} = \Delta\boldsymbol{r}_{отн}$. Стало быть,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A'B'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{AB}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}_{отн}}{\Delta t}\equiv \boldsymbol{\upsilon}_{отн}\ , \tag{16}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{\upsilon}_{абс}=\boldsymbol{\upsilon}_{пер}+\boldsymbol{\upsilon}_{отн}. \tag{17}$$

Это и есть содержание теоремы о сложении скоростей: *абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей.*

Отметим, что приведенный вывод теоремы справедлив в самом общем случае произвольного движения подвижной системы, включая и ее вращение. При этом различные точки Q будут иметь разные скорости. В (17) же входит скорость $\boldsymbol{\upsilon}_{пер}$ вполне определенной точки этой системы, а именно той, *с которой совпадает в данный момент движущаяся частица*.

Пример. С какой минимальной скоростью $\boldsymbol{u}$ должен двигаться автомобиль под дождем, чтобы его заднее стекло оставалось сухим? Скорость капель дождя вертикальна и равна $\boldsymbol{\upsilon}$, стекло наклонено к вертикали под углом α(рис. 11).

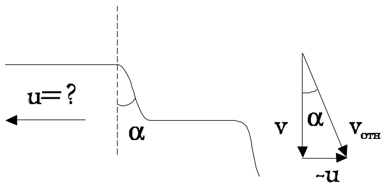


Рис. 11

Найдем скорость капель дождя в движущейся системе координат, связанной с автомобилем. В соответствии с нашими определениями $\boldsymbol{\upsilon}$ — абсолютная, а $\boldsymbol{u}$ — переносная скорости капель. Из (17) их скорость относительно автомобиля

$$\boldsymbol{\upsilon}_{отн}=\boldsymbol{\upsilon}_{абс}-\boldsymbol{\upsilon}_{пер}=\boldsymbol{\upsilon}-\boldsymbol{u}\ =\boldsymbol{\upsilon}+(-\boldsymbol{u}).$$

Таким образом, в системе, связанной с движущимся автомобилем, дождь окажется уже косым (см. рис.11), причем угол наклона $\boldsymbol{\upsilon}_{отн}$ к вертикали тем больше, чем выше скорость автомобиля. Чтобы заднее стекло оставалось сухим, этот угол должен быть, очевидно, не меньше α. Отсюда получаем величину минимальной скорости автомобиля

$$u=\upsilon\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Замечание 1. Напомним еще раз, что мы рассматриваем нерелятивистские, т. е. далекие от световых, скорости. В общем случае произвольных скоростей формулы их преобразования из одной системы в другую заметно усложняются. Из этих формул, в частности, следует, что если $\boldsymbol{\upsilon}_{отн}=\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{пер}=\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — скорость света, то $\boldsymbol{\upsilon}_{абс}$ равна не $2\boldsymbol{c}$, как это получалось бы в ньютоновой механике по формуле (17), а тоже $\boldsymbol{c}$. Движение со скоростями, бóльшими скорости света, невозможно. При $\upsilon_{отн}$, $\upsilon_{пер}$<< c релятивистский закон сложения скоростей, естественно, переходит в (17).

Замечание 2. Наряду с вопросами преобразования скоростей встают аналогичные вопросы с трансформацией ускорений. Будет ли абсолютное ускорение равно сумме относительного и переносного? Да, показывают расчеты, но только при условии, что движущаяся система *не вращается*.

При наличии вращения формула для ускорений, аналогичная (17), перестает быть справедливой: в ее правой части появляется еще одно слагаемое — так называемое кориолисово ускорение, пропорциональное угловой скорости вращения подвижной системы.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется длиной отрезка и длительностью временнóго интервала?
2. В чём отличие прямого метода измерений от косвенного?
3. Как определяются единицы длины и времени в системе СИ?
4. Что такое система отсчёта? Все ли они равноправны в кинематике?
5. Что понимают под материальной точкой?
6. Описать основные способы задания движения точки.
7. Дать определение векторам перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$, средней $\boldsymbol{\upsilon}_{ср}$ и мгновенной $\boldsymbol{\upsilon}$ скоростей. Как эти векторы ориентированы относительно друг друга и траектории движения?
8. Дать определение пройденному пути. Что такое средний модуль скорости и чем он отличается от модуля средней скорости?
9. Что называется средним и мгновенным ускорениями? Куда направлены эти векторы?
10. Получить выражения для тангенциального и нормального ускорений.
11. Сформулировать и доказать теорему о сложении скоростей. Справедлива ли аналогичная теорема о сложении ускорений?

<u>Лекция 2</u>

Глава 2. ДИНАМИКА

Динамикой называется раздел механики, изучающий движение тел совместно с причинами, придающими ему тот или иной характер. Основу динамики составляют три закона Ньютона.

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

В кинематике все системы отсчета равноправны и выбор какой-нибудь из них диктуется соображениями удобства при решении рассматриваемой задачи. В динамике же, как показывает опыт, сами законы, управляющие движением, меняются при переходе из одной системы отсчета в другую. Естественно попытаться выбрать такую из них, в которой эти законы выглядят наиболее просто. Оказывается, что такая система существует, причем не одна, а бесчисленное множество. Называются они инерциальными, а выделить их можно с помощью I закона Ньютона, или закона инерции.

§ 2.1. Закон инерции

Опыт дает, что *существуют системы отсчета* (называемые инерциальными), *в которых любое тело, свободное от действия других тел, покоится или движется равномерно и прямолинейно*. В чем состоит основное содержание этого закона? Ведь если существует свободное тело, то, очевидно, всегда можно выбрать и систему отсчета, в которой это тело покоится или движется равномерно и прямолинейно[1]. Однако закон утверждает, что в этой системе *любое другое* свободное тело должно вести себя точно так же. Далее, с точки зрения этого закона состояние покоя и равномерного прямолинейного движения являются абсолютно равноправными и "естественными", не требующими никакой причины, никакого объяснения. Объяснения требуют как раз изменения этих состояний. И наконец, из него следует также, что любая система отсчета, движущаяся поступательно (т. е. без вращения), равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, тоже является инерциальной.

Итак, I закон Ньютона вводит понятие инерциальной системы отсчета и утверждает, что такие системы отсчета существуют. Как же на практике убедиться в их существовании? Для этого достаточно, в принципе, взять изолированное тело и проследить за его движением в различных системах координат, не связанных с ним. Если среди них найдётся такая, где это

[1] Более того, это, очевидно, можно сделать и для любого *несвободного* тела, например, связав с ним систему координат (в которой оно всегда будет покоиться).

движение будет равномерным и прямолинейным — значит, закон инерции справедлив[1], если нет — то либо он не выполняется[2], либо надо искать другие системы.

Трудности в реализации подобного рецепта начинаются уже с выбора свободного тела. Как убедиться, что оно действительно свободно от внешних воздействий? Понятно, все "контактные" взаимодействия с ним надо убрать, но могут остаться влияния внешних объектов посредством всяких "невидимых" полей (например гравитационного, электрического и т. п.). Как избавиться и от них? Поскольку известно (из опыта), что интенсивность всех наблюдаемых в физике взаимодействий спадает с расстоянием, нужно удалить наше тело от всех других достаточно далеко. Однако в земных условиях невозможно избавиться от земного притяжения и, таким образом, получить изолированное тело. Поэтому на Земле поставить эксперимент, непосредственно подтверждающий верность I закона Ньютона, невозможно. Требуются несравненно бо́льшие расстояния, на которые нужно раздвинуть тела, чтобы их можно было считать невзаимодействующими. Такими расстояниями предстают перед нами астрономические дистанции, а изолированными объектами — звезды и планеты. Чем дальше удалена звезда от ближайших небесных тел, тем с лучшим приближением ее можно считать свободным телом. Стало быть, сама природа подсказала масштабы явлений, описываемых I законом Ньютона и, таким образом, дала направление поиска инерциальных систем.

Действительно, связав систему отсчета с несколькими неподвижными (друг относительно друга) звездами и проследив за движением в ней других изолированных небесных тел, можно с *определенной степенью точности* (ибо абсолютно изолированных объектов в природе не существует) убедиться в справедливости закона инерции.

А существует ли возможность проверить I закон Ньютона, не выходя за пределы нашей планеты и не прибегая к космическим наблюдениям? Смогли бы люди его установить, если бы, например, Земля была окружена непрозрачным туманом? Да, косвенным путем. Ведь закон этот выделяет системы отсчета, где выполняются все остальные законы механики, и если он

---

[1] Случайно может оказаться, что выбранная система отсчёта вращается, а наше тело находится на оси вращения и движется вдоль нее. Тогда все будет выглядеть так, будто вращающаяся система инерциальна. Чтобы исключить такую ситуацию, нужно "пробное" тело помещать в различные точки пространства и после этого "отпускать". Всякий раз его движение должно быть инерциальным.

[2] Строго говоря, чтобы утверждать, что выбранная система инерциальна, нужно перепробовать все тела на свете, по очереди изолируя их и помещая в нашу систему. Однако мы ожидаем, что I закон Ньютона отражает "устройство" окружающего нас мира, а не проявления свойств определенного изолированного объекта, так что если он справедлив для какого-либо одного тела, то он окажется верным и для любого другого.

неверен, то неверными окажутся и они. Наблюдая отклонения движения тел в какой-либо системе отсчета от предписанного законами Ньютона, можно судить о степени ее неинерциальности. Та система, в которой эти отклонения пренебрежимо малы, и есть инерциальная. Такой косвенный путь проверки закона инерции ничуть не хуже непосредственного. Более того, именно он лежит в основе наиболее убедительного доказательства существования инерциальных систем, ибо справедливость законов механики (и первого в том числе) подтверждается не столько опытами и наблюдениями, проведенными при их открытии, сколько согласием с экспериментом огромного числа расчетов и предсказаний, выполненных на их основе.

§ 2.2. Сила. II закон Ньютона

1. Понятие силы. В инерциальных системах отсчета нарушить "естественное" состояние покоя или равномерного прямолинейного движения может только взаимодействие с другими телами. Для количественной характеристики этого взаимодействия вводят особую величину — силу. Если скорость тела меняется, то говорят, что на него действует сила. Значит, появление ускорения — это результат действия силы. А как же возникает сама сила? Каким образом тела оказывают влияние друг на друга?

Причины появления силы могут быть различными. Например, если по проводящему телу пустить электрический ток, то оно начинает взаимодействовать с другим проводящим телом, по которому тоже течет ток: появляется, как говорят, магнитная сила. Это значит, что если данные тела не подвержены действию других объектов, то они приобретают ускорения. Можно зарядить тела — тогда возникает электрическая сила и т. д. В зависимости от свойств и состояния исследуемого объекта между ним и окружающими телами могут возбуждаться силы разного рода и свойств. Физика классифицирует эти силы, объединяя их по характерным признакам и относя к силам определенной природы, или определенного типа. Однако все силы в механике независимо от своей природы имеют одно общее проявление, которое и кладется в основу их *определения*: действуя на любой изолированный объект, они вызывают его ускорение.

Как же количественно охарактеризовать силу? Каковы основные ее свойства?

Для количественного описания силы необходимо выбрать какую-либо процедуру, вызывающую ее появление. Затем зафиксировать условия проведения этой процедуры и таким образом эталонизировать силу. Далее нужно договориться о способах сравнения и измерения сил. И уже потом исследовать их свойства. Процедуру, вызывающую появление силы, желательно, конечно, выбрать попроще. Одной из наиболее простых таких процедур является небольшое смещение частей твердого тела друг относительно друга, называемое упругой деформацией[1]. Его-то мы и положим в основу количественной характеристики силы.

Итак, сформулируем ряд определений.

1. Возьмем эталонную пружину и сожмем на фиксированную величину Δx. Будем говорить, что пружина (в какой-либо инерциальной системе отсчета) действует на прижатое к ее концу тело (материальную точку) с некоторой эталонной силой $\boldsymbol{F}_0$, направленной вдоль оси пружины в сторону, противоположную направлению деформации (рис. 1)[2].

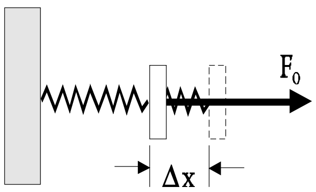


Рис. 1

2. Будем считать, что если под действием эталонной (и не только эталонной, но и любой) силы материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно, то на нее действует еще одна сила, равная по величине и противоположная по направлению. Это утверждение позволяет воспроизводить эталонную силу в неограниченном числе экземпляров, а также служит критерием равенства сил.

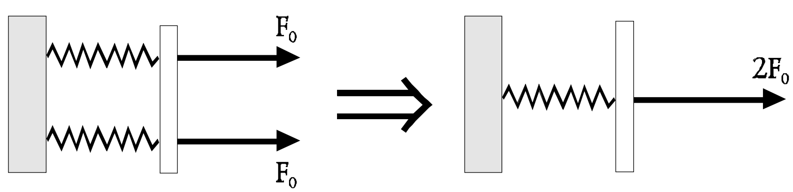


Рис. 2

3. Будем считать, что две эталонные (и не только эталонные, но и лю-

[1] Смещение частей тела относительно друг друга происходит и при нагревании (тепловое расширение). Однако такое смещение не приводит к возникновению силы. Отличить одно явление от другого можно, только подробно их изучив. В частности, если температура тела при взаимном смещении его частиц не меняется, то это деформация.

[2] Это, конечно, не единственный путь выбора эталона силы. Можно, например, взять два определенных небольших проводящих тела, скажем, два шарика, поместить их на фиксированном расстоянии друг от друга и зарядить до некоторой разности потенциалов, подключив тоже ко вполне определенному гальваническому элементу. Тогда один из шариков начнет действовать на другой с некоторой силой, которая и будет служить эталоном. Важно понимать, что при таком способе введения эталона силы в его основу кладется не *закон* Кулона, а *явление* электризации (закон Кулона дает *зависимость* электрической силы от зарядов и расстояний; в наших же действиях зависимость эта нигде не фигурирует). Точно так же выбранный в основном тексте способ основан не на законе Гука, а на явлении упругой деформации.

бые) параллельные силы эквивалентны[1] одной силе, которая равна их сумме и имеет то же направление (рис. 2). Это определение позволяет ввести в рассмотрение произвольную силу, равную целому числу эталонных сил. Если выбрать эталон достаточно малым по величине, то с наперед заданной точностью можно воспроизвести (и измерить) любую силу вообще.

Этими определениями исчерпывается количественная характеристика силы, однако исследование ее влияния на движение материальной точки сильно осложняется тем обстоятельством, что практически всегда такая точка взаимодействует сразу со многими окружающими объектами (абсолютно изолированных тел в природе вообще не существует), т. е. подвержена одновременному действию многих сил. Нельзя ли свести их к меньшему числу или даже одной силе? Другими словами, если материальная точка под влиянием нескольких сил вышла из состояния покоя или равномерного прямолинейного движения, то может ли она быть снова в него приведена дополнительным воздействием всего лишь одной силы? Да, говорит эксперимент, это всегда возможно. Мы сформулируем это в виде следующего утверждения (проверяемого только опытным путем), которое назовем основным свойством силы: система двух сил, действующих на материальную точку, эквивалентна одной силе, называемой их результирующей или равнодействующей, которая строится по правилу параллелограмма (рис. 3). Таким образом, результирующая является векторной суммой действующих сил, т. е. *силы складываются, как векторы.*

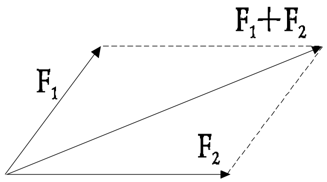


Рис. 3

2. II закон Ньютона. Описав, что такое сила, можно теперь экспериментально ответить на вопрос, как ее воздействие будет изменять скорость движения материальной точки. Оказывается — и в этом состоит основное содержание II закона Ньютона, — что определенная нами сила меняет скорость достаточно просто: приращение скорости в единицу времени (т. е. *ускорение* $\boldsymbol{a}$ *точки*) *пропорционально действующей силе*, причем закон этот носит векторный характер:

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{F}. \qquad (1)$$

Однако, как показывает опыт, ускорение однозначно силой не определяется: оно зависит еще от свойств самого тела (материальной точки), называемых инертностью. Чем инертнее тело, тем труднее изменить его скорость. Количественно инертность выражается числом (скаляром), приписываемым каждому телу и называемым инертной массой (или просто массой) m. Этот

[1] Две системы сил называются эквивалентными, если они оказывают на исследуемый объект одинаковое действие.

параметр является коэффициентом пропорциональности в соотношении (1), который принято писать в знаменателе:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}. \tag{2}$$

Векторное уравнение (2) можно записать в проекциях на оси координат в виде трех соотношений, называемых уравнениями движения:

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m},\ \ddot{y} = \frac{F_y}{m},\ \ddot{z} = \frac{F_z}{m}. \tag{3}$$

Из этих уравнений следует, что движение вдоль каждой из осей, например x, определяется лишь проекцией силы на эту ось. Если эта проекция не зависит от остальных координат и скоростей точки (т. е. y и z, υ_y и υ_z), то движение вдоль выбранной оси оказывается никак не связанным с движением вдоль остальных осей. В общем же случае сила $\boldsymbol{F}$ является функцией всех трех координат точки, их производных и еще времени t и уравнения (3) могут быть весьма сложными. В математике такие уравнения называются дифференциальными уравнениями второго порядка. Если их решить, то получатся не три (или больше) *числа*, как, например, при решении алгебраических уравнений, а три *функции*: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — закон движения точки. Можно показать, что при решении дифференциальных уравнений функции, удовлетворяющие им, определяются всегда неоднозначно (дифференциальное уравнение, в принципе, однозначно задать функцию не может). В частности, уравнения второго порядка определяют искомые функции с точностью до двух произвольных постоянных. Постоянные эти находятся не из уравнений, а из дополнительных условий, которые нужно наложить на эти функции и которых тоже должно быть два для каждой из них. Обычно (но не всегда) это координаты x, y, z и скорости υ_x, υ_y, υ_z, задаваемые в какой-то определенный момент времени (так называемые начальные условия).

Пример. Найти закон движения точки в однородном поле тяжести.

Направим ось y декартовой координатной системы вертикально вверх, а оси x и z горизонтально. Тогда уравнения движения (3) точки примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{F_x}{m} = 0, \\ \ddot{y} &= \frac{F_y}{m} = -g, \\ \ddot{z} &= \frac{F_z}{m} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где знак минус соответствует противоположным направлениям оси y и силы $m\boldsymbol{g}$. Уравнения "развязались", ибо вертикальная сила $m\boldsymbol{g}$ не зависит от горизонтальных координат x и z и скоростей υ_x и υ_z. Это значит, что движение вдоль каждой из осей происходит независимо от движения вдоль других. Для x– и z–направлений, ускорение вдоль которых равно нулю, получается равномерное движение, для y–направления — равноускоренное:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \upsilon_{0x}t, \\ y(t) &= y_0 + \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \\ z(t) &= z_0 + \upsilon_{0z}t. \end{aligned} \tag{5}$$

Константы x_0, y_0, z_0, υ_{0x}, υ_{0y}, υ_{0z} представляют собой начальные (т. е. в момент времени $t = 0$) координаты и скорости точки вдоль соответствующих осей. Их можно задать любыми, при этом функции (5) все равно будут удовлетворять уравнениям (4).

Если к силе тяжести добавить силу сопротивления воздуха, пропорциональную (при медленном полете) скорости движения тела и направленную навстречу ей,

$$\boldsymbol{F}_{сопр} = -h\boldsymbol{\upsilon} \tag{6}$$

(h = $const$ > 0), то уравнения усложнятся, однако по-прежнему останутся независимыми:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x = -h\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= F_y = -mg - h\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= F_z = -h\dot{z}. \end{aligned} \tag{7}$$

Независимым будет и движение точки вдоль каждой из осей. Если подвергнуть наше тело еще и влиянию неравномерного ветра, скорость которого меняется от точки к точке, то уравнения "зацепятся" и задача еще более усложнится, и т. д.

Вернемся теперь к обсуждению II закона Ньютона. Итак, он говорит о пропорциональности ускорения действующей силе и вводит понятие инертной массы как коэффициента этой пропорциональности. Из опыта известно основное свойство массы — аддитивность. Это значит, что масса "суммы тел" равна сумме их масс.

II закон Ньютона можно записать в несколько иной форме, если воспользоваться понятием импульса. *Импульсом или количеством движения* $\boldsymbol{p}$ *материальной точки называется произведение ее массы на скорость:*

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon}. \tag{8}$$

Умножив уравнение (2) на m и учитывая, что

$$m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}),$$

получим

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \tag{9}$$

или

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}dt. \tag{10}$$

Произведение $\boldsymbol{F}dt$ называется импульсом силы $\boldsymbol{F}$ за элементарный промежуток времени dt. В такой форме II закон Ньютона гласит: *изменение импульса точки в течение малого интервала dt равно импульсу силы за этот интервал.*

В рамках нашего рассмотрения обе формулировки закона абсолютно эквивалентны друг другу. Однако при переходе к скоростям, близким к скорости света, эквивалентность эта нарушается и правильным оказывается лишь выражение (10). При этом понятие импульса точки усложняется: он уже не определяется формулой (8), а начинает более сложно зависеть от скорости. При дальнейшем рассмотрении механики, как уже отмечалось, мы ограничимся случаем малых скоростей.

Во II законе Ньютона присутствуют две динамические характеристики — сила и масса, и для их измерения какая-либо из этих величин должна быть эталонизирована. В системе СИ вводится эталон массы — платино-иридиевый образец (хранимый в Палате мер и весов), масса которого принимается равной единице массы (она называется килограммом). Единица силы определяется из II закона: сила равна единице, если единичной массе (эталону) она сообщает единичное ускорение. В СИ единицей силы является ньютон:

$$1\text{Н} = 1\text{кг}\cdot 1\text{м/с}^2 = 1\text{кгм/с}^2.$$

§ 2.3. III закон Ньютона

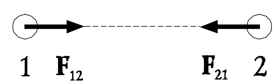


Рис. 4

Этот закон утверждает, что любое влияние тел друг на друга всегда является взаимным: если тело (материальная точка) 1 действует на тело 2 с силой $\boldsymbol{F}_{21}$, то тело 2 обязательно тоже действует на тело 1 с силой $\boldsymbol{F}_{12}$ (рис. 4), причем силы $\boldsymbol{F}_{12}$ и $\boldsymbol{F}_{21}$:

1) приложены, очевидно, к разным телам;
2) равны по величине;
3) противоположны по направлению, т. е.

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}; \qquad (11)$$

4) действуют вдоль одной прямой;

5) являются силами одной природы (одного типа).

Пример. На столе лежит книга. Указать силы, действующие на нее, и найти противодействующие им по III закону Ньютона.

На книгу действуют две силы: вниз — сила тяжести со стороны Земли $\boldsymbol{G}$ и вверх — сила реакции стола $\boldsymbol{N}$ (рис. 5). Это силы разной природы (первая — гравитационная, вторая — упругости). Каждой из них есть противодействующая: первой — гравитационная сила, приложенная к центру Земли вверх (с какой силой Земля притягивает книгу, с такой силой и книга притягивает Землю), второй — упругая сила давления книги на стол, направленная вниз.

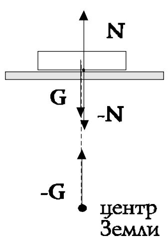


Рис. 5

III закон Ньютона утверждает, что равенство (11) имеет место в любой момент времени. Значит, если взаимодействующие объекты разделены некоторым расстоянием и один из них сдвинуть, то второй должен сразу это почувствовать. Стало быть, закон предполагает мгновенное распространение взаимодействий, что, строго говоря, неверно: существует некоторая предельная скорость передачи взаимодействий. Таким образом, равенство (11) оказывается приближенным, справедливым с точностью до некоторого запаздывания, необходимого для передачи информации об изменениях с одним из взаимодействующих тел другому. Однако в нашем рассмотрении мы будем пренебрегать этим запаздыванием (всегда очень малым) и потому считать III закон справедливым с весьма высокой точностью.

Законы Ньютона были сформулированы нами для тел пренебрежимо малых размеров, т. е. материальных точек, однако они позволяют, в принципе, рассчитывать движение и протяженных объектов. Ведь каждый из таких объектов можно представить состоящим из большого числа материальных точек, взаимодействующих и друг с другом, и с остальными телами. К каждой из этих точек уже могут быть непосредственно применены законы Ньютона. Пример подобного подхода мы увидим в следующем параграфе.

Законы Ньютона (вместе с определением и основным свойством силы) представляют собой систему аксиом, служащих фундаментом всей классической механики. Аксиомы эти являются гениальным обобщением данных опыта и отражают "внутреннюю структуру" мира, в котором мы живем. Уж так устроен окружающий нас мир, что в нем справедливы законы Ньютона!

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Мы рассмотрим два основных закона сохранения — импульса и механической энергии. Мы теоретически докажем их справедливость, ибо в рамках нашего рассмотрения они являются следствиями законов Ньютона.

§ 2.4. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему материальных точек m_1, m_2,..., m_n, которые подвержены действию как внутренних, так и внешних сил (рис. 6).

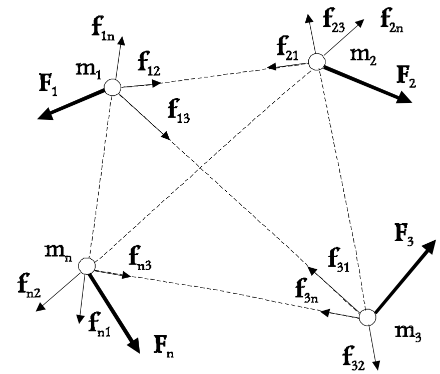


Рис. 6

Внутренние силы $\boldsymbol{f}_{ij}$ действуют со стороны частиц, входящих в нашу систему, внешние $\boldsymbol{F}_i$ – со стороны тел, не входящих в нее. Запишем II закон Ньютона в форме (9) для каждой точки:

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{13} + \ldots + \boldsymbol{f}_{1n} + \boldsymbol{F}_1,$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{f}_{23} + \ldots + \boldsymbol{f}_{2n} + \boldsymbol{F}_2, \qquad (12)$$

....

$$\frac{d\boldsymbol{p}_n}{dt} = \boldsymbol{f}_{n1} + \boldsymbol{f}_{n2} + \ldots + \boldsymbol{f}_{n,n-1} + \boldsymbol{F}_n .$$

Сложим эти уравнения. При этом все внутренние силы в правой части полученного равенства взаимно попарно уничтожатся, ибо любой из них найдется в соответствии с III законом Ньютона равная и противоположная:

$$\boldsymbol{f}_{ij} + \boldsymbol{f}_{ji} = 0. \qquad (13)$$

В итоге получим (производная суммы равна сумме производных)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+...+\boldsymbol{p}_n)=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+...+\boldsymbol{F}_n\,. \tag{14}$$

Это уравнение в компактной форме принято записывать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\,. \tag{14'}$$

Здесь индекс i, стоящий у величины под знаком суммы Σ, пробегает значения от 1 до n.

Назовем *импульсом или количеством движения* ***P*** *системы* (геометрическую) *сумму импульсов отдельных ее точек*:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+...+\boldsymbol{p}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i\,, \tag{15}$$

а через $\boldsymbol{F}$ обозначим сумму внешних сил: $\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$. Тогда соотношение (14) примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}, \tag{16}$$

т. е. *производная импульса системы по времени равна* (геометрической) *сумме внешних сил, приложенных к системе.*

Следует иметь в виду, что в правой части (16) стоит, как это непосредственно явствует из приведенного вывода, именно геометрическая сумма, но не равнодействующая всех приложенных сил. Не всякая система сил $\boldsymbol{F}_i$, вообще говоря, произвольно ориентированных в пространстве и приложенных к различным точкам системы, имеет равнодействующую, но геометрическую сумму этих сил (приведя их к общему началу и воспользовавшись правилом параллелограмма) можно построить всегда.

В проекциях на оси координат выражение (16) запишется в виде

$$\frac{dP_x}{dt}=F_x,\ \frac{dP_y}{dt}=F_y,\ \frac{dP_z}{dt}=F_z. \tag{17}$$

Если сумма внешних сил равна нулю (или они вообще отсутствуют), *то* из (16) получаем

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{0}, \tag{18}$$

или

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{const}, \tag{18'}$$

т. е. *импульс системы сохраняется***.** Это утверждение носит название закона сохранения импульса.

Системы, для которых внешние силы отсутствуют, называются замкнутыми. В них импульс сохраняется. Если равна нулю только проекция силы на какую-либо из осей, то, как следует из (17), сохраняется и проекция импульса на эту ось.

Равенство (16) можно, конечно, записать в несколько иной форме, аналогично тому, как мы сделали это с уравнением (9):

$$d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}dt, \tag{19}$$

или в проекциях на оси координат:

$$dP_x = F_x dt,\ \ dP_y = F_y dt,\ \ dP_z = F_z dt. \tag{20}$$

В этой форме оно говорит, что изменение импульса системы за элементарный промежуток времени равно импульсу суммы всех внешних сил за этот промежуток.

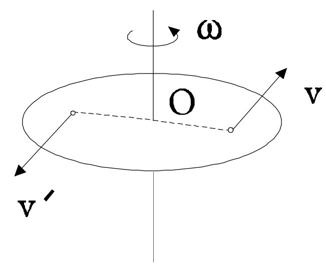


Рис. 7

Пример 1. Найти импульс ***P*** однородного диска, вращающегося вокруг своей оси (рис. 7).

По определению ***P*** — это геометрическая сумма импульсов всех маленьких участков, на которые может быть разбит этот диск. Поскольку каждый из них движется (за исключением находящихся на оси), он обладает вполне определенным импульсом, отличным от нуля. Однако любому такому участку найдется симметричный относительно оси вращения, равный по массе и движущийся с такой же скоростью, но в противоположном направлении. Очевидно, что сумма импульсов этих участков равна нулю. Разбивая весь диск на такие пары элементов и суммируя по всем парам, убеждаемся, что полный импульс системы тоже равен нулю.

Пример 2. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью $\boldsymbol{v}$, попадает в брусок массой M, неподвижно лежащий на горизонтальной плоскости (рис. 8). В каком случае брусок приобретет большую скорость: когда пуля застрянет в нем или когда пробьет его насквозь?

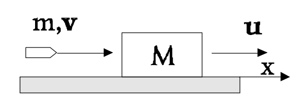


Рис. 8

Рассмотрим внешние силы, действующие на нашу систему. Это, во-первых, силы тяжести, приложенные со стороны Земли к пуле и бруску, и, во-вторых, сила реакции плоскости, действующая на брусок.

Предположим сначала, что трения нет. Тогда все эти силы вертикальны и проекция их геометрической суммы на любое горизонтальное направление равна нулю. Значит, горизонтальная составляющая импульса системы должна сохраняться. Выберем ось x направленной вдоль скорости пули $\boldsymbol{\upsilon}$ и свяжем законом сохранения импульса в проекции на эту ось два состояния системы: до попадания пули и сразу после ее остановки в бруске или вылета из него. В первом случае имеем

$$m\upsilon_x = Mu_x + mu_x, \tag{21}$$

где u_x — x-проекция скорости бруска. Во втором случае

$$m\upsilon_x = Mu'_x + m\upsilon'_x, \tag{22}$$

где u'_x и υ'_x — x-проекции скорости бруска и пули после ее вылета. Таким образом, один и тот же начальный импульс распределяется между пулей и бруском по-разному: в первом случае пуля "забирает" малую его долю (ибо движется медленно вместе с бруском), во втором — большую ($\upsilon'_x > u'_x$). Стало быть, во втором случае бруску остается меньший импульс и его скорость оказывается меньше.

Пусть теперь между бруском и плоскостью действуют силы трения. Тогда горизонтальная составляющая импульса системы уже не будет сохраняться: она изменится на величину импульса силы трения за время "удара" dt. В этом случае вместо (21) в соответствии с (20) получим

$$Mu_x + mu_x - m\upsilon_x = F_{трx}dt, \tag{23}$$

где $F_{трx}$ — x-проекция силы трения. Если, однако, время dt взаимодействия очень мало, то импульсом силы трения можно пренебречь по сравнению с любым слагаемым левой части уравнения (23)[1] и оно тогда перейдет в (21). То же можно сказать и о второй ситуации, когда пуля пробивает брусок.

§ 2.5. Теорема о движении центра масс

Соотношение (16) очень похоже на уравнение движения материальной точки. Попробуем привести его к еще более простому виду $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Для этого преобразуем левую часть, воспользовавшись свойствами операции

[1] Точнее, критерием малости импульса силы трения служит ее малость по сравнению с внутренними силами, возникающими при застревании пули. Именно в этом смысле и следует понимать определение таких часто встречающихся понятий, как удар, взрыв и т. п. Возникающие при этом в течение короткого промежутка времени силы оказываются, как правило, много больше всех других действующих сил (тяжести, трения и т. п.), и импульсом последних за этот промежуток можно пренебречь.

дифференцирования $(y+z)'= y'+z'$, $(ky)'= ky'$, $k = const$:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\Big) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{d(m_i \boldsymbol{r}_i)}{dt}\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i\Big] = \frac{d^2}{dt^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i\Big). \tag{24}$$

Домножим и разделим (24) на массу всей системы $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ и подставим в уравнение (16):

$$M \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{M}\Big) = \boldsymbol{F}\,. \tag{25}$$

Выражение, стоящее в скобках, имеет размерность длины и определяет радиус-вектор некоторой точки, которая называется *центром масс системы*:

$$\boldsymbol{r}_{ц.м.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_n \boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\,. \tag{26}$$

В проекциях на оси координат (26) примет вид

$$x_{ц.м.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$
$$y_{ц.м.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_{ц.м.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{27}$$

Если (26) подставить в (25), то получим теорему о движении центра масс:

$$M \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{r}_{ц.м.} = \boldsymbol{F}\,, \tag{28}$$

т. е. *центр масс системы движется, как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы, под действием суммы внешних сил*, приложенных к системе. Теорема о движении центра масс утверждает, что какими бы сложными ни были силы взаимодействия частиц системы друг с другом и с внешними телами и как бы сложно эти частицы ни двигались, всегда можно найти точку (центр масс), движение которой описывается просто. Центр масс — некая геометрическая точка, положение которой определяется распределением масс в системе и которая может не совпадать ни с одной из ее материальных частиц.

Произведение массы системы на скорость $\boldsymbol{v}_{ц.м}$ ее центра масс, как это следует из его определения (26), равно импульсу системы:

$$M\boldsymbol{v}_{ц.м.} = M\,\frac{d\boldsymbol{r}_{ц.м.}}{dt} = \sum m_i \frac{\sum m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum m_i} = \boldsymbol{P}. \qquad (29)$$

В частности, если сумма внешних сил равна нулю, то центр масс движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Пример 1. В некоторой точке траектории снаряд разрывается на множество осколков (рис. 9). Как будет двигаться их центр масс?

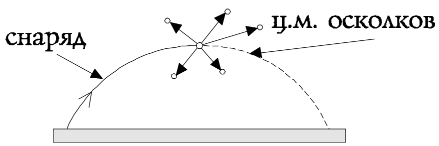


Рис. 9

Центр масс "полетит" по той же параболической траектории, по которой двигался бы неразорвавшийся снаряд: его ускорение в соответствии с (28) определяется суммой всех сил тяжести, приложенных к осколкам, и общей их массой, т. е. тем же уравнением, что и движение целого снаряда. Однако, как только первый осколок ударится о Землю, к внешним силам — силам тяжести — добавится сила реакции Земли и движение центра масс исказится.

Пример 2. На покоящееся тело начинает действовать "пара" сил $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$ (рис. 10). Как будет двигаться тело?

Поскольку геометрическая сумма внешних сил равна нулю, ускорение центра масс также равно нулю и он останется в покое. Тело будет вращаться вокруг неподвижного центра масс.

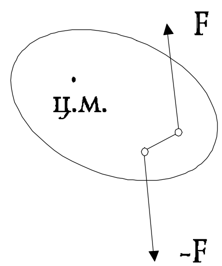


Рис. 10

Есть ли какие-либо преимущества у закона сохранения импульса перед законами Ньютона? В чем сила этого закона?

Главное его достоинство в том, что он носит интегральный характер, т. е. связывает характеристики системы (ее импульс) в двух состояниях, разделенных конечным промежутком времени. Это позволяет получить важные сведения сразу о конечном состоянии системы, минуя рассмотрение всех промежуточных ее состояний и деталей происходящих при этом взаимодействий.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать закон инерции. В чём состоит основное содержание этого закона?
2. Можно ли в земных условиях экспериментально проверить справедливость I закона Ньютона? Если да, то, например, как, если нет, — почему?
3. В чём состоит косвенный способ проверки закона инерции?
4. Что такое сила? Сформулировать три определения, лежащие в основе количественной характеристики силы.
5. В чём состоит основное свойство силы? Это свойство является определением, постулатом или теоремой?
6. Сформулировать II закон Ньютона. Что называется массой тела? Что означает её аддитивность?
7. В каких единицах в системе СИ измеряются сила и масса? Какая из этих величин эталонизирована?
8. Дать определение импульса материальной точки. Что называется импульсом силы? Сформулировать II закон Ньютона с использованием понятия импульса.
9. Сформулировать III закон Ньютона и указать границы его применимости.
10. Указать все силы, действующие на лежащую книгу, и соответствующие им по III закону Ньютона.
11. Что называется импульсом системы материальных точек?
12. Получить закон сохранения импульса системы.
13. Что такое центр масс системы?
14. Сформулировать и доказать теорему о движении центра масс.