Лекция 13

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

§ 8.22. Взаимная энергия системы точечных зарядов

Рассматривая перемещение точечного заряда в данном поле (см. лекцию 10), мы ввели понятие потенциальной энергии заряда во внешнем поле. При этом предполагалось, конечно, что заряды, создающие это поле, остаются неподвижными. Однако этот простейший случай далеко не всегда реализуется на практике, и часто складывается ситуация, когда сами заряды, создающие поле, могут перемещаться[1]. Движение каждого заряда в этой ситуации уже нельзя считать происходящим в заданном поле. Можно ли и здесь говорить о потенциальной энергии теперь уже системы зарядов? Будет ли работа поля, в котором перемещаются заряды, не зависеть от формы траектории движения каждого из них и определяться лишь начальной и конечной конфигурациями системы?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим сначала всего два точечных заряда q_1 и q_2, взаимодействующих друг с другом (рис. 1). Пусть заряд q_1 совершил малое произвольное перемещение $\Delta\boldsymbol{r}_1$, а заряд q_2 — перемещение $\Delta\boldsymbol{r}_2$. Если перемещения эти достаточно малы, то кулоновы силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ можно считать практически постоянными на всем их протяжении и элементарные работы ΔA_1 и ΔA_2, совершённые полем над каждым зарядом, окажутся равными соответственно

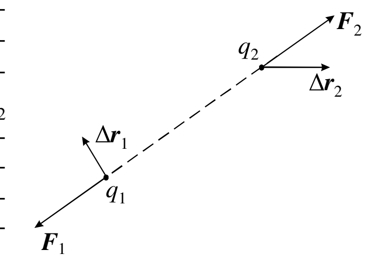

Рис. 1

$$\Delta A_1 = (\boldsymbol{F}_1, \Delta\boldsymbol{r}_1),$$

$$\Delta A_2 = (\boldsymbol{F}_2, \Delta\boldsymbol{r}_2).$$

Если учесть, что $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, то выражение для суммарной элементарной работы ΔA запишется в виде

$$\Delta A = (\boldsymbol{F}_2, \Delta\boldsymbol{r}_2) - (\boldsymbol{F}_2, \Delta\boldsymbol{r}_1) = (\boldsymbol{F}_2, \Delta\boldsymbol{r}_2 - \Delta\boldsymbol{r}_1) = (\boldsymbol{F}_2, \Delta\boldsymbol{r}_{отн}), \qquad (1)$$

---

[1] Мы ограничимся рассмотрением достаточно медленных движений зарядов, при которых картину поля в каждый момент времени можно считать стационарной, определяемой законом Кулона и расположением зарядов в данный момент.

где

$$\Delta \boldsymbol{r}_{отн} = \Delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \Delta \boldsymbol{r}_2 - \Delta \boldsymbol{r}_1$$

представляет собой (относительное) перемещение второго заряда относительно первого. Но точно такое же выражение для работы получается, если заряд q_1 закрепить, а q_2 переместить на $\Delta \boldsymbol{r}_2 = \Delta \boldsymbol{r}_{отн}$.

Если заряды q_1 и q_2 совершают конечные перемещения, то, представляя каждую траекторию в виде последовательности n элементарных перемещений, можно. очевидно, используя (1), свести полную работу сил вдоль этих траекторий к работе вдоль одной траектории, состоящей из всех $\Delta \boldsymbol{r}_{отн}$. Таким образом, вычисление работы кулоновых сил при одновременном перемещении обоих зарядов сводится к более простой задаче определения работы при движении одного из зарядов в заданном поле другого. Отсюда следует, что работа при одновременном перемещении (так же, как и в заданном поле) от формы траекторий зарядов не зависит, а определяется, помимо их величин, только начальным и конечным расстояниями между ними. Это позволяет ввести понятие взаимной потенциальной энергии $U_{вз}$ двух точечных зарядов. Под этой энергией мы будем понимать работу, совершаемую электрическими силами при удалении зарядов с какого-то фиксированного расстояния между ними на бесконечность (при этом энергия на бесконечности, очевидно, принимается равной нулю). По доказанному, взаимная энергия двух зарядов равна энергии одного из них (например q_2) в поле другого (q_1):

$$U_{вз} = q_2 \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}, \tag{2}$$

где q_1 и q_2 — величины зарядов, r_{12} — расстояние между ними, а φ_2 — потенциал внешнего поля (т. е. поля q_1) в точке, занимаемой зарядом q_2.

Обращаясь к системе n точечных зарядов, произвольно расположенных в пространстве, нетрудно видеть, что и в этом случае введение понятия их взаимной энергии правомерно. Ведь при удалении любой пары таких зарядов на бесконечность силы их взаимодействия совершают вполне определенную работу (2) независимо от того, есть ли ещё другие заряды, или их нет (принцип суперпозиции). Каждый новый заряд, образуя пары со всеми остальными, дает лишь свой собственный вклад в работу кулоновых сил, не искажая характера взаимодействия остальных зарядов друг с другом и не меняя совершённой при этом взаимодействии работы. Поэтому полная работа электрических сил при произвольных перемещениях зарядов будет определяться суммой работ, произведенных этими силами над каждой парой, и не должна зависеть ни от траекторий их движения, ни от последовательности, в которой происходят эти перемещения.

Итак, назовем *взаимной энергией* $U_{вз}$ *системы n точечных зарядов*, образующих данную конфигурацию, *работу кулоновых сил по удалению всех зарядов друг от друга на бесконечность*. В силу вышесказанного работа эта будет определяться, помимо величин зарядов, лишь взаимным их расположением, причём для подсчёта её необходимо просуммировать выражения типа (2) по всем парам:

$$U_{вз} = \sum_{\substack{\text{по всем}\\\text{парам}}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}, \tag{3}$$

где q_i и q_j — величины i-го и j-го зарядов, а r_{ij} — расстояние между ними.

Один из способов подсчёта суммы по парам состоит в следующем. Возьмем q_1 и найдём энергию его взаимодействия $U_{вз1}$ со всеми остальными (т. е. q_2, q_3, ... , q_n). Получим

$$U_{вз1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{q_1q_n}{r_{1n}}\right) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_i}{r_{1i}}. \tag{4}$$

Затем возьмем q_2 и для него тоже найдём энергию взаимодействия со всеми остальными (в том числе и с первым!):

$$U_{вз2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2q_1}{r_{21}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{q_2q_n}{r_{2n}}\right) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}\frac{q_i}{r_{2i}} \tag{5}$$

и т. д. вплоть до q_n.

Сложим все найденные выражения. Ясно, что в полученную сумму энергия каждой пары войдет дважды: для любого члена $\dfrac{q_i q_j}{r_{ij}}$ обязательно найдётся равный ему $\dfrac{q_j q_i}{r_{ji}}$. Таким образом, она равна удвоенному значению суммы (3) по всем парам зарядов, т. е. энергию их взаимодействия $U_{вз}$ можно вычислять также по следующей формуле:

$$U_{вз} = \frac{1}{2}\left(q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{n}\frac{q_i}{r_{1i}} + q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}\frac{q_i}{r_{2i}} + \ldots + q_n\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n}\frac{q_i}{r_{ni}}\right).$$

Но множители, стоящие при каждом заряде в этом соотношении, суть потенциалы, создаваемые всеми остальными зарядами в занимаемой им точке (для первого и второго зарядов они в явном виде расписаны в (4) и (5)). Следовательно, для взаимной энергии системы n точечных зарядов окончательно получаем

$$U_{вз} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \ldots + q_n\varphi_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i, \tag{6}$$

где φ_i — потенциал, создаваемый в точке i-го заряда всеми источниками, кроме i-го.

В качестве простейшего примера использования общей формулы (6) найдём взаимную энергию двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга:

$$U_{вз} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}(q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r},$$

что, естественно, совпадает с (2).

§ 8.23. Собственная энергия заряда

После того как все взаимодействующие точечные заряды окажутся друг от друга на бесконечности, их взаимная энергия обратится в нуль. Можно ли считать, что система таких зарядов вообще не обладает электростатической энергией? Очевидно, нет. Ведь если подойти поближе к любому такому заряду, то он окажется вовсе не точечным, а состоящим из большого числа ещё более мелких заряженных элементов[1]. Эти элементы испытывают взаимное кулоновское отталкивание, и если позволить им разлететься на бесконечность, то действующие между ними силы совершат определенную работу. Эта работа[2] и представляет собой так называемую собственную энергию заряда $U_{соб}$. Эту же работу (против кулоновых сил) нужно затратить, чтобы собрать данный заряд из бесконечно малых элементов, находящихся на очень больших расстояниях друг от друга.

Из сказанного следует, что *собственная энергия заряда — это взаимная энергия всех его бесконечно малых элементов.* Для расчета её необходимо разбить данный заряд на очень маленькие кусочки и воспользоваться формулами (3) или (6). При этом под q_i в них надо понимать заряд i-го кусочка, занимающего малый объем ΔV_i. Если объемная плотность

[1] Мы не рассматриваем здесь случая, когда точечным зарядом является элементарная частица, несущая квант заряда. Вообще введение понятия «абсолютно» точечного заряда (т. е. заряда, совсем не имеющего размеров) «выкалывает» из пространства определённые точки и делает их недоступными для исследования. Более адекватной является концепция непрерывно распределённого по объёму заряда, которой как наиболее общей мы и пользуемся в нашем рассмотрении. Впрочем, справедливость того или иного подхода в каждом конкретном случае проверяется опытом.

[2] Очевидно, она не будет зависеть от траекторий движения отдельных элементов заряда.

заряда (т. е. заряд, приходящийся на единицу объема) внутри этого кусочка равна ρ_i, то

$$q_i = \rho_i \Delta V_i$$

и собственная энергия заряда

$$U_{соб} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{парам}}} \frac{\rho_i \Delta V_i \rho_j \Delta V_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{кусочкам}}} \rho_i \varphi_i \Delta V_i \,. \qquad (7)$$

Здесь необходимо иметь в виду следующее. Перебирая все возможные пары кусочков, мы наткнёмся среди них и на такие, которые находятся вплотную друг к другу, а потому не могут считаться точечными (ибо расстояние между их «центрами» сравнимо с их размерами). Однако чем мельче разбиение нашего заряда, тем меньшую долю составляют пары таких соседствующих элементов от общего числа пар и тем меньший вклад в сумму (7) они будут давать. В пределе, при безгранично мелком разбиении, формула (7) оказывается совершенно точной. При этом из потенциала φ_i, созданного в объеме ΔV_i всеми элементами заряда, вычитать вклад i-го кусочка, как того требует формула (6), не нужно, ибо вклад этот при $\Delta V_i \to 0$ сам стремится к нулю. Действительно, выбирая для оценки в качестве ΔV_i шар радиусом r_i и учитывая, что его потенциал в центре

$$\Delta\varphi_i \sim \frac{\Delta q_i}{r_i} = \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i} \sim \frac{r_i^3}{r_i} = r_i^2,$$

получим, что $\Delta\varphi_i \to 0$ при $\Delta r_i \to 0$.

Итак, собственная энергия заряда

$$U_{соб} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \varphi_i \Delta V_i \,, \qquad (7')$$

где суммирование распространено по всем малым элементам ΔV_i, на которые нужно разбить этот заряд, $\rho_i \Delta V_i$ — малый заряд i-го элемента, а φ_i — потенциал, созданный в объеме ΔV_i всеми кусочками рассматриваемого заряда.

§ 8.24. Полная энергия системы зарядов. Энергия заряженных проводников

Если сложить взаимную и собственную энергии системы зарядов, то мы получим полную энергию $U_{полн}$ системы. Соответствующая ей процедура подразумевает раздвигание всех точечных зарядов на бесконечность и удаление, кроме того, всех элементов каждого уже уединённого заряда далеко друг от друга[1]. Поскольку работа, совершённая кулоновскими силами по удалению на бесконечность всех малых элементов, на которые можно разбить данную систему зарядов, не зависит, как было показано, от последовательности, в которой производится это удаление, полную энергию можно считать, раздвигая сразу все элементы. Таким образом, *под полной энергией* в общем случае *следует понимать работу кулоновых сил при раздвигании всех бесконечно малых элементов всех зарядов далеко друг от друга*. Для её определения достаточно представить нашу систему как один большой заряд и повторить все рассуждения предыдущего параграфа. В итоге мы, очевидно, получим аналогичную (7′) формулу для полной энергии системы зарядов

$$U_{полн} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho_i \varphi_i \Delta V_i, \qquad (8)$$

где φ_i — потенциал, создаваемый в объеме ΔV_i всеми малыми элементами *всех зарядов* нашей системы, а остальные обозначения те же, что и в (7′).

Таким образом, наиболее общей формулой является формула (8) для полной потенциальной энергии системы зарядов. Если же эту систему можно представить совокупностью точечных зарядов, то её полная энергия представляется в виде суммы их взаимной и собственной энергий:

$$U_{полн} = U_{вз} + U_{соб}\,. \qquad (9)$$

В тех случаях, когда собственная энергия всех зарядов не меняется, изменения полной энергии определяются изменениями $U_{вз}$. Поскольку всегда существенны лишь изменения энергии (а не абсолютное её значение), в этих случаях вместо выражения (8) можно пользоваться более простой формулой (6).

Примером противоположной ситуации являются энергетические превращения в системе заряженных проводников. Если размеры их сравнимы с расстояниями между ними, то приближение точечных зарядов не выполняется и для расчетов необходимо пользоваться общей формулой (8). Пусть рассматриваемая система состоит из n проводников, несущих заряды $q_1, q_2, ..., q_n$ и имеющих потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. При вычислении полной энергии разобьём сумму в (8) на n частей, каждая из которых соответствует суммированию в пределах одного какого-либо проводника:

[1] Отметим еще раз, что один и тот же заряд может рассматриваться как точечный, если мы находимся далеко от него, и как неточечный, если подойти к нему достаточно близко.

$$U_{полн} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\rho_i\Delta V_i = \frac{1}{2}\left\{\sum_{1\,пр\text{-}к}\varphi_i\rho_i\Delta V_i + \sum_{2\,пр\text{-}к}\varphi_i\rho_i\Delta V_i + \ldots + \sum_{n\,пр-к}\varphi_i\rho_i\Delta V_i\right\}.$$

Но потенциал в пределах каждого проводника постоянен, а потому его можно вынести за знак суммы. Под суммой же останутся заряды всех участков проводника (располагающиеся, как известно, на его поверхности, так что вместо $\rho_i\,\Delta V_i$ можно записать $\sigma_i\,\Delta S_i$), которые после суммирования дадут полный его заряд. Стало быть,

$$U_{полн} = \frac{1}{2}\{\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \ldots + \varphi_n q_n\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i. \qquad (10)$$

Формулу (10) не следует путать с формулой (6) взаимной энергии точечных зарядов. В первой представлена полная энергия зарядов, и под φ_i в ней понимается потенциал i-го проводника, созданный всеми зарядами, в том числе и зарядами самого этого проводника, в то время как в выражении (6) стоит потенциал, создаваемый в i-й точке всеми зарядами, кроме i-го.

Пример. Используя (10), найдём полную энергию заряженного конденсатора:

$$U_{полн} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}q_1(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (11)$$

ибо $q_1 = -\,q_2$. По определению, эта энергия выделится, если пластины конденсатора разбить на бесконечно малые участки и разнести их в бесконечность, однако, как мы увидим в следующем параграфе, она же выделится, если конденсатор просто разрядить.

§ 8.25. Энергия электрического поля

Рассматривая работу кулоновых сил и вводя понятие потенциальной энергии системы зарядов, мы не должны забывать, что главным «действующим лицом» во всех этих (и многих других) явлениях служит электрическое поле — некий самостоятельный объект, агент, передающий электрические взаимодействия. Поэтому естественно попытаться преобразовать выражения для энергии зарядов, полученные в предыдущих параграфах, к такой форме, где в явном виде присутствовала бы основная характеристика поля — его напряжённость $\boldsymbol{E}$. Для этого рассмотрим простейшую электрическую систему — уе-

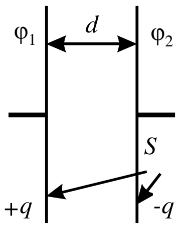

Рис. 2

динённый плоский конденсатор, заряженный зарядами $+q$ и $-q$ (рис. 2). Такая система проводников, как известно, создаёт поле только между обкладками, причём поле однородное (в пренебрежении краевыми эффектами). Полная её энергия в соответствии с (11)

$$U_{полн} = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}qEd, \tag{11′}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы обкладок конденсатора, d — расстояние между ними, а E — величина напряжённости электрического поля внутри конденсатора. Поскольку E однозначно определяется поверхностной плотностью заряда на внутренних сторонах обкладок,

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S},$$

где S — площадь пластины, то, выражая отсюда q и подставляя в (11′), получим

$$U_{полн} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SE^2 d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V, \tag{12}$$

где $V=Sd$ — объём, занятый полем. Таким образом, полная энергия заряженных пластин конденсатора, создающих однородное поле, оказывается пропорциональной объёму, занятому этим полем.

Можно показать, используя систему основных уравнений электростатики (7л11), что и в общем случае произвольного распределения зарядов их полная энергия выражается через напряжённость созданного ими поля и даётся аналогичной (12), но более общей формулой

$$U_{полн} = \sum_i \frac{\varepsilon_0 E_i^2}{2}\Delta V_i, \tag{13}$$

где суммирование производится по всем малым элементам объёма, на которые разбивается область пространства, занятая полем, а E_i — модуль его напряжённости внутри ΔV_i.

Хотя это равенство является преобразованной формой выражения (8) и с математической точки зрения вполне ему эквивалентно, оно позволяет дать совершенно иную трактовку полученных в предыдущих параграфах результатов. По (13) полная электрическая энергия представляется в виде суммы бесконечного числа слагаемых, каждое из которых относится к определённому элементу объема ΔV_i и выражается через характеристики поля внутри него. Поэтому в данное равенство может быть вложен следующий физический смысл: *полная энергия всякой системы зарядов со-*

держится в возбуждаемом ими поле и распределена в пространстве с объёмной плотностью (т. е. энергией, приходящейся на единицу объёма)

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (14)$$

Энергия, которую при такой интерпретации естественно назвать энергией поля,

$$W = \sum_{\substack{\text{по всему} \\ \text{полю}}} w_i \Delta V_i\ , \qquad (13')$$

где w_i — плотность энергии в объёме ΔV_i.

Очевидно, *энергия поля представляет собой ту работу, которую нужно совершить (против сил этого поля), чтобы его создать*; причём работа эта не зависит от способа, которым создаётся поле. Действительно, поскольку любое электростатическое поле однозначно задается его источниками и, наоборот, полностью их определяет, создать данное поле — значит собрать определенную конфигурацию зарядов из бесконечно малых их элементов, находящихся очень далеко друг от друга. А так как работа по созданию этой конфигурации не зависит от способа, которым она была образована, соответствующее ей поле и, следовательно, его энергия также от него не зависят. При этом, если наша система электронейтральна — случай, часто встречающийся на практике, — не обязательно собирать заряды из бесконечности: достаточно просто разделить их. Ведь ситуации, в одной из которых исчезающе малые по величине «плюсы» и «минусы» равномерно перемешаны друг с другом, а в другой — заряды (любого знака) распределены с бесконечно малой объемной плотностью по большой области пространства, физически неразличимы, ибо обе дают нулевое поле везде[1]. Понятно, что при исчезновении поля электрические силы будут, наоборот, совершать работу, равную W, причём для этого нужно либо «распылить» все заряды и развеять пыль по пространству, либо, если рассматриваемая система нейтральна, разрядить её.

Итак, электрическую энергию можно связывать либо с системой за-

[1] Точнее говоря, необходимо убедиться в нулевой энергии поля в обеих этих ситуациях. Если в первой это очевидно, то во второй — вместе с уменьшением поля с ростом области пространства, занятой зарядом, увеличивается и объём поля, так что энергия его может, в принципе, и не стремиться к нулю. Нетрудно видеть, однако, что этого не произойдет. Выбирая в качестве такой области шар радиусом R и считая его равномерно заряженным зарядом q, получим, что при $R \to \infty$ эффективный объём поля (близкий к объёму шара) $V \sim R^3$. Максимальное же поле, создаваемое им (на его поверхности) $E \sim \dfrac{q}{R^2}$, так что $W \sim E^2 V \sim \dfrac{1}{R} \to 0$.

рядов, взаимодействующих друг с другом посредством кулоновых сил, либо с возбуждаемым этими зарядами электрическим полем. В первом случае мы называем её полной энергией зарядов и вычисляем по формуле (8), во втором — приписываем эту энергию электрическому полю и находим по формуле (13). Оба выражения дают, разумеется, одно и то же число, однако в первом случае исключается возможность рассматривать энергию локализованной в определенных участках пространства[1]. Пока мы остаемся в рамках электростатики, где поля́ и заряды однозначно определяют друг друга, обе эти трактовки равноправны и абсолютно эквивалентны, ибо одинаково хорошо согласуются с опытом. Однако в рамках теории переменных полей, могущих существовать отдельно от зарядов, эквивалентность эта нарушается, и ряд наблюдаемых на опыте явлений может быть истолкован только на основе допущения о локализации энергии в электрическом (в этом случае оно становится электромагнитным) поле.

До сих пор речь шла об эквивалентности *полной* энергии зарядов и энергии поля. Но полная энергия зарядов в тех случаях, когда они могут рассматриваться как точечные, т. е. не меняются по размерам, форме и величине и не подходят близко друг к другу, представима в виде суммы взаимной и собственной их энергий. Возможно ли такое представление и с точки зрения полевой трактовки энергии?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим два точечных заряда q_1 и q_2, возбуждающих кулоновские поля $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ в окружающем пространстве. По принципу суперпозиции результирующее поле в любой точке

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2,$$

а плотность его энергии в этой точке

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) = \frac{\varepsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) = \frac{\varepsilon_0}{2} [E_1^2 + E_2^2 + 2(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2)] .$$

Умножая w на малый объём ΔV_i и суммируя по всей области поля, получим

$$W = W_1 + W_2 + W_{12},$$

где энергии поля

$$W_1 = \sum_i \frac{\varepsilon_0}{2} E_{1i}^2 \Delta V_i,$$

$$W_2 = \sum_i \frac{\varepsilon_0}{2} E_{2i}^2 \Delta V_i,$$

[1] См. по этому поводу замечание 2 в конце данного параграфа.

очевидно, соответствуют (и равны) собственным энергиям зарядов q_1 и q_2, а

$$W_{12} = \sum_i \varepsilon_0(\boldsymbol{E}_{1i}, \boldsymbol{E}_{2i})\Delta V_i \tag{15}$$

представляет собой их взаимную энергию.

Таким образом, разбиению полной энергии зарядов на собственную и взаимную может быть дана очень ясная физическая интерпретация с точки зрения возбуждаемого этими зарядами поля.

Из очевидного неравенства

$$|\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2|^2 \geq 0$$

следует, что

$$E_1^2 + E_2^2 \geq 2\,(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2),$$

откуда

$$W_1 + W_2 \geq W_{12},$$

т. е. суммарная всегда положительная собственная энергия зарядов обязательно больше (или, в крайнем случае, равна) их взаимной энергии, которая в зависимости от знаков зарядов может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Физически это совершенно понятно, ибо средние расстояния между элементами любого заряда, взаимодействие которых друг с другом определяет его собственную энергию, всегда меньше расстояний от них до элементов другого заряда.

Приведённые рассуждения можно, очевидно, распространить на случай любого числа зарядов.

Замечание 1. Поскольку энергия электрического поля пропорциональна квадрату его напряжённости, она не обладает свойством аддитивности (ибо квадрат суммы не равен сумме квадратов). Это значит, что энергия поля $\boldsymbol{E}$, являющегося суммой двух (или нескольких) полей, не равна сумме энергий каждого поля в отдельности (например, в случае двух полей они отличаются, как мы видели, на величину W_{12}). В частности, при возрастании поля в n раз его энергия увеличится в n^2 раз.

Замечание 2. Пока мы рассматривали систему зарядов в отрыве от возбуждаемых ими полей, понятие потенциальной энергии взаимодействия имело простой смысл: это — некоторая функция, зависящая от взаимного расположения зарядов, с помощью которой можно легко подсчитать работу действующих между ними консервативных кулоновых сил. Энергия *связывалась* нами с системой зарядов и определялась их конфигурацией, но можно было с равным правом привлечь понятие поля зарядов и найти значение этой же функции, зная распределение поля.

Электродинамика, однако, внесла существенные коррективы в эту свободу трактовок. Показав (теоретически и экспериментально) возможность ситуаций, в которых нет зарядов, но есть поля́, она сохранила понятие электрической энергии и вынудила нас отнести его к электромагнитному полю. Под энергией поля и в электродинамике мы понимаем ту работу, которую нужно совершить, чтобы создать данное поле. Поскольку в электродинамике существуют иные, нежели распределение зарядов, способы возбуждения электрического поля (этим, в частности, она и отличается от статики), там показывается, что работа по этому возбуждению определяется лишь конечными значениями поля в каждой точке и не зависит от промежуточных его значений и способов, которыми оно создано. Это и позволяет сохранить понятие энергии поля как функции (зависящей уже от распределения поля в пространстве), разность значений которой для двух распределений даёт работу электрических сил при переходе поля от одного распределения к другому.

Далее, точно так же, как и в случае статической системы зарядов, где мы можем выделить какую-то часть из них и говорить об энергии взаимодействия зарядов этой части друг с другом и с остальными зарядами, можно приписать определённую энергию каждому элементу объёма поля и вложить в неё упомянутый выше смысл, т. е. придать понятию энергии поля локальный характер. Правомерность подобных воззрений допускает принципиальную экспериментальную проверку (разумеется, подтверждающую их).

Таким образом, вкладывая в понятие потенциальной энергии простой смысл некой функции, позволяющей легко находить работу сил поля, мы можем *отнести* эту функцию к любой области электрического поля. Но допустимо ли говорить о том, где она *расположена*? Что значит утверждение, что в данной области пространства локализована такая-то энергия?

Чтобы так говорить, необходимо считать энергию уже не просто функцией, т. е. математической абстракцией, а некой реальностью, которая существует сама по себе. Нужно обнаружить у энергии ещё какое-то свойство, свойство физического объекта, позволяющее экспериментально определить, где он находится. Оказывается, что такое свойство есть: энергия «весома». Как известно из теории относительности (формула Эйнштейна $E = mc^2$), энергия и масса эквивалентны друг другу. А по закону всемирного тяготения любая масса является источником гравитационного притяжения. Стало быть, всякая энергия тоже оказывается источником силы тяготения и по тому, где́ он расположен (а это проверяется экспериментально), можно судить, ка́к локализована в пространстве эта энергия. В настоящее время имеются экспериментальные данные, подтверждающие «весомость» электромагнитного поля, так что говорить о локализации энергии в определенных участках пространства вполне допустимо и далеко не бессмысленно.

§ 8.26. Энергия электрического поля в диэлектрике.

Под энергией электрического поля в диэлектрике, как и в вакууме, *понимается работа, которую нужно совершить, чтобы создать это поле* (очевидно, такая же энергия выделится при исчезновении поля). Можно показать, что работа эта не зависит от манипуляций, проводимых с зарядами-источниками и самим диэлектриком, а определяется лишь конечными значениями поля в каждой точке пространства.

Для расчёта этой энергии рассмотрим однородный изолятор, заполняющий всё поле, и воспользуемся модельными представлениями, введенными в § 8.20. Поскольку возбуждение поля в диэлектрике неизбежно приводит к его поляризации, лишь часть энергии этого поля будет представлять собой чисто электростатическую энергию $W_{эл}$, определяемую выражениями (13′) и (14). Другая же её часть будет связана с энергией $W_{упр}$ упругой деформации, обусловленной растяжением пружинок молекул среды (см. рис. 7 лекции 12). Последнюю можно найти, если умножить квазиупругую энергию $\frac{kx^2}{2}$ одной молекулы на их концентрацию n и объём ΔV рассматриваемой области диэлектрика:

$$W_{упр} = \frac{kx^2}{2} n\Delta V.$$

Подставляя сюда x из (11л12), получим

$$W_{упр} = \frac{q^2E^2}{2k} n\Delta V = \frac{q^2 n}{k\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V = \alpha\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V = (\varepsilon-1)\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V, \quad (16)$$

где E — величина поля в диэлектрике, α и ε — его диэлектрические восприимчивость и проницаемость (см. §8.20), а ΔV считается настолько малым, что в его пределах E и ε можно считать постоянными.

Таким образом, полная энергия поля в изоляторе объёмом ΔV

$$W = W_{эл} + W_{упр} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V + (\varepsilon-1)\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}\Delta V, \quad (17)$$

а плотность энергии (т. е. энергия, приходящаяся на единичный объём)

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}. \quad (18)$$

Суммируя выражения (17) по всему объёму, занятому полем, с учётом (18) получим:

$$W_{\Sigma} = \sum w_i \Delta V_i. \tag{19}$$

Подчеркнём, что в (18) входит величина E поля *в диэлектрике*, которая меньше поля E_0 тех же свободных зарядов в вакууме в ε раз.

Существенно сложнее оказывается картина в жёсткодипольных диэлектриках, молекулы которых не имеют запаса упругой энергии, зависящей от внешнего поля. Однако ориентирующее воздействие поля на молекулы среды, совершающие тепловое движение, приводит к *изменению энергии* этого движения, т. е. к нагреванию (или охлаждению) изолятора. Стало быть, для диэлектриков и этого типа работа, затраченная на возбуждение поля (т. е. его энергия), помимо чисто электростатической составляющей, содержит ещё слагаемое, вызванное увеличением энергии теплового движения его молекул. Если же температура диэлектрика поддерживается постоянной, то это слагаемое даст *выделившуюся теплоту*. Можно показать, что теплота эта в точности совпадает с величиной $W_{упр}$, даваемой выражением (16) и, стало быть, в случае *изотермического процесса* энергия поля также определяется формулами (18) и (19).

Пример. Какую работу против сил электрического поля необходимо совершить, чтобы (медленно) вытащить диэлектрическую пластину с проницаемостью ε из плоского конденсатора данной ёмкости, заряженного зарядами $\pm q$?

После извлечения пластины плотность энергии поля в конденсаторе (отключённого от источника) возрастёт в $\dfrac{w_0}{w} = \dfrac{E_0^2}{\varepsilon E^2} = \dfrac{\varepsilon^2 E^2}{\varepsilon E^2} = \varepsilon$ раз. В той же пропорции, очевидно, и увеличится его энергия. Стало быть, искомая работа, как раз пошедшая на это увеличение, равна

$$A = W_0 - W = (1 - \frac{1}{\varepsilon}) W_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q^2}{2C_0},$$

где C_0, очевидно, ёмкость воздушного конденсатора, а W_0 — его энергия.

Контрольные вопросы и задания

1. Показать, что работа, совершаемая кулоновскими силами при одновременном перемещении двух зарядов, определяется (помимо их величин) лишь начальным и конечным расстояниями между ними.

2. Дать определение взаимной энергии произвольной совокупности точечных зарядов. Получить формулу для её расчёта.
3. Что называется собственной энергией заряда. Получить формулу для её расчёта. Чему равна собственная энергия уединённого точечного заряда?
4. Дать определение полной энергии системы зарядов. Получить формулу для её расчёта.
5. Всегда ли полная энергия представима в виде суммы взаимной и собственной энергий? Если да, то почему, если нет, то когда именно?
6. Получить выражение для полной энергии системы заряженных проводников.
7. Что называется энергией электростатического поля? Получить выражения для этой энергии, рассматривая плоский конденсатор.
8. Что называется плотностью энергии электростатического поля? Привести выражение для энергии электростатического поля в общем случае.
9. Получить выражения для полной, собственной и взаимной энергий системы двух уединённых зарядов с точки зрения полевой трактовки энергии.
10. Показать, что сумма собственных энергий двух зарядов всегда больше их взаимной энергии.
11. Что больше и почему: полная энергия системы зарядов или энергия созданного ими электростатического поля?
12. Можно ли в рамках электростатики экспериментально установить, с чем именно связана электростатическая энергия: с электрическим полем или с возбуждающими его зарядами? Если да, то как именно, если нет — почему?
13. Что называется энергией электрического поля в диэлектрике? Из каких частей она состоит в диэлектриках с молекулами в виде квазиупругих и жёстких диполей?
14. Получить выражение для энергии электрического поля в диэлектрике, используя модель квазиупругих диполей.
15. Увеличится, уменьшится, или останется неизменной энергия поля созданного данной совокупностью свободных зарядов, если всё пространство, занятое полем, заполнить диэлектриком?

Оглавление