Лекция 12

ЭЛЕКТРОЁМКОСТЬ

§ 8.15. Ёмкость уединённого проводника

Единственное условие, которому подчиняется распределение зарядов на поверхности системы проводников — это равенство нулю напряжённости поля в каждой точке внутри каждого проводника. Отсюда, в частности, следует, что потенциал на всём протяжении любого проводника сохраняет постоянное значение, ибо там, где нет полей, потенциал, в соответствии с (2л11) и (3л11), меняться не может. На этом же условии основывается и доказательство теоремы единственности, так что оно является достаточным[1] для однозначного определения поля в любой точке пространства. Покажем, что из него же вытекает пропорциональность между зарядом уединённого проводника и его потенциалом, что позволяет ввести понятие электрической ёмкости.

Рассмотрим уединённый проводник и поместим на него заряд q. Пусть он разместился на поверхности с плотностью $\sigma(M)$. А как разместится заряд $2q$? Очевидно, он распределится с поверхностной плотностью $2\sigma(M)$. Действительно, распределение $\sigma(M)$ обеспечивает $E = 0$ в любой точке внутри проводника. А поскольку каждый элемент поверхности даёт в это поле вклад $\Delta\boldsymbol{E}_i$, пропорциональный его заряду, то при удвоении последнего удвоятся, не меняясь по направлению, и все $\Delta\boldsymbol{E}_i$, так что их векторная сумма останется нулевой. Значит, распределение $2\sigma(M)$, соответствующее заряду $2q$, «подходит», а по теореме единственности оно единственно.

Отсюда следует, что и снаружи проводника в каждой точке потенциал созданного им поля удвоится (ибо он определяется всё тем же распределением $2\sigma(M)$). В частности, удвоится он и в точках, принадлежащих его поверхности. Таким образом, потенциал уединённого проводника φ оказывается пропорциональным его заряду q:

$$\varphi = \frac{1}{C} q\,, \tag{1}$$

где коэффициент пропорциональности, который (как это часто бывает) принято писать в знаменателе, называется электроёмкостью или просто

[1] Разумеется, вместе с законом Кулона.

ёмкостью проводника[1].

Единицей ёмкости в системе СИ служит фарад (Ф). Очевидно,

$$1\text{Ф} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{В}} = 1\frac{\text{Кл}}{\text{В}} ,$$

т. е. 1Ф — это ёмкость такого проводника, сообщение заряда 1 Кл которому поднимает его потенциал на 1 В. Это очень большая величина. На практике ёмкость измеряют в микрофарадах (1мкФ = 10^{-6}Ф) или пикофарадах (1пкФ = 10^{-12}Ф).

Образно говоря, ёмкость характеризует способность проводника накапливать заряд: чем она выше, тем больший заряд «влезает» на проводник, прежде чем его потенциал достигнет фиксированной величины.

Пример. Ёмкость уединённого шара (сферы).

Для расчета электроёмкости нужно поместить на проводник произвольный заряд q и найти его потенциал φ. Коэффициент пропорциональности между ними и даст ёмкость. Для шара, очевидно,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} q ,$$

где R — радиус шара, так что

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R . \qquad (2)$$

Отсюда может быть получена единица электрической постоянной ε_0: её измеряют в Ф/м.

§ 8.16. Конденсаторы

Показанная пропорциональность потенциала уединённого проводника его заряду, очевидно, нарушится, если проводник не уединён. Конечно, и в этом случае условием равновесия зарядов на проводнике является равенство нулю поля внутри него, но теперь в это поле будут давать вклад и внешние источники. Разумеется, вклад этот не будет пропорционален заряду проводника, ибо он в значительной мере определяется характеристиками самих источников. Таким образом, и потенциал проводника, равный сумме вкладов внешних источников и собственного заряда q, оказывается,

[1] Из приведённых рассуждений со всей очевидностью вытекает, что понятие ёмкости неприменимо по отношению к непроводникам, ибо там «всё не так»: заряд не может свободно перемещаться по ним, его распределение не единственно и зависит, например, от способа зарядки, внутри непроводника могут существовать электрические поля, и поверхность его оказывается не эквипотенциальной, так что говорить о потенциале непроводника вообще не имеет смысла, и т. д.

вообще говоря, не пропорциональным ему[1].

Если, однако, заключить проводник в замкнутую проводящую оболочку, то можно восстановить эту пропорциональность. В этом случае поле внутри оболочки и разность потенциалов между ней и находящимся внутри проводником совершенно не зависят от того, что «делается» снаружи. Чтобы доказать это, поместим на проводник и окружающую его оболочку произвольные заряды q_1 и q_2 (рис. 1, а).

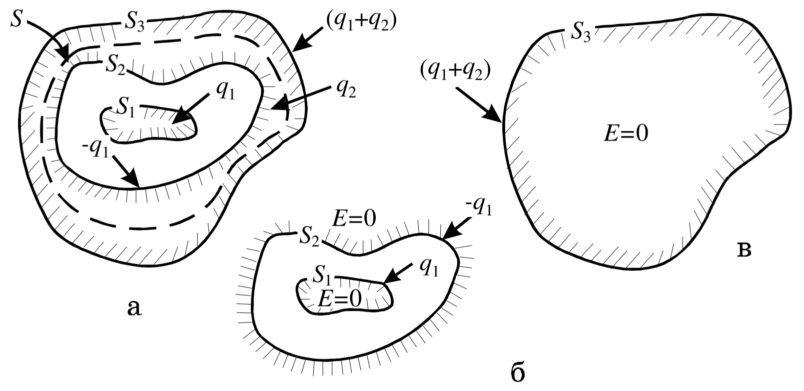


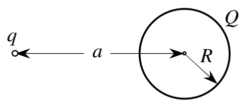
Рис. 1

Эти заряды так разместятся на трёх имеющихся поверхностях S_1, S_2 и S_3, что поле в каждой точке проводника и оболочки обратится в нуль. При этом заряд q_2 оболочки разделится вполне определённым образом между внутренней и внешней её поверхностями: на внутренней выделится заряд $-q_1$, а оставшийся заряд $+q_1+q_2$ уйдет на внешнюю. Действительно, выбирая замкнутую поверхность S, целиком проходящую в толще оболочки (где $E=0$), и применяя к ней теорему Гаусса, мы получим, что из равенства нулю потока через эту поверхность следует равенство нулю полного заряда внутри нее, и если на проводнике находится заряд q_1, то заряд $-q_1$ должен выделиться на внутренней поверхности оболочки.

Попытаемся теперь представить рассматриваемую картину распределения заряда (и созданного им поля) в виде суперпозиции картин двух более простых распределений, изображённых на рис. 1, б, в. Первая картина

---

[1] Простейшим примером нарушения этой пропорциональности может служить проводящий шар, несущий заряд Q и помещённый в поле точечного заряда q на расстоянии a от него. Очевидно, потенциал шара $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}+\frac{q}{a}\right)$ уже не пропорционален Q. Впрочем, см. по этому поводу § 8.18.



получается, если всё пространство снаружи оболочки заполнить проводником. При этом останутся лишь две поверхности S_1 и S_2, заряженные зарядами q_1 и $-q_1$, и поле между ними. Во всём остальном пространстве, т. е. внутри S_1 и снаружи S_2, система зарядов $\{q_1, -q_1\}$ *поля не создаёт*. Для реализации второй картины заполним проводником всю область внутри оболочки. Тогда останется поверхность S_3 с зарядом q_1+q_2 и все остальные (внешние) заряды, размещённые вне оболочки произвольным образом. Эта система зарядов даёт отличное от нуля поле только снаружи поверхности S_3; *внутри* же неё в каждой точке $E = 0$.

Итак, мы имеем две системы зарядов $\{q_1, -q_1\}$ и $\{q_1+q_2$, остальные заряды$\}$, причём первая система не создаёт поля там, где находятся заряды второй системы, а вторая не возбуждает его в местах расположения зарядов первой. Значит, при наложении этих распределений они не почувствуют друг друга, а потому никак друг друга не исказят. При этом поля́ их сложатся в каждой точке, и там, где оба распределения порознь давали нулевое поле, оно нулевым и останется. Следовательно, после наложения будут две области нулевого поля: внутри S_1 и между S_2 и S_3. Но это как раз области, занимаемые проводником и окружающей его оболочкой. Таким образом, найденное распределение заряда, давая нулевое поле внутри проводника и оболочки, является решением поставленной задачи и, в силу теоремы единственности, решением единственным.

Пространства внутри и вне оболочки оказываются совершенно не связанными друг с другом: любые перемещения проводника[1] внутри оболочки, приводя лишь к перераспределению заряда на её внутренней поверхности, никак не скажутся на полях и распределениях заряда снаружи и наоборот. Отсюда следует, что если зафиксировать относительные положения проводника и оболочки и менять его заряд q, то возникающая между ними разность потенциалов $\Delta\varphi$ будет пропорциональна q. Для доказательства этого нужно лишь учесть, что на внутренней поверхности оболочки всегда будет располагаться заряд $-q$ (остальной заряд уйдет на её внешнюю сторону), и повторить приведённое выше доказательство для случая уединённого проводника. Доказательство это останется, очевидно, в силе и в случае произвольного *конденсатора, т. е. системы двух изолированных проводников*, один из которых не обязательно охватывает другой, но *которые, будучи заряженными равными и противоположными зарядами, создают поле в ограниченной области пространства, куда не проникают поля внешних источников*. Таким образом, для конденсатора

$$\Delta\varphi = \frac{1}{C} q\,, \tag{3}$$

[1] Очевидно, приведенное доказательство сохраняет силу и в случае произвольного числа любых зарядов и проводников, находящихся внутри замкнутой оболочки.

где постоянная $C > 0$ называется его ёмкостью, а q и $\Delta\varphi$ берутся одного знака; $|q|$ называется зарядом конденсатора, а $|\Delta\varphi|$ — напряжением на нём (мы будем обозначать его обычно буквой U).

Пример. Ёмкость плоского конденсатора.

Плоским конденсатором называется система двух проводящих плоских параллельных пластин (обкладок), расстояние между которыми много меньше их размеров (рис. 2). Если обкладки зарядить зарядами $+q$ и $-q$, то возникает поле лишь в области между ними (краевыми эффектами мы пренебрегаем) и разность потенциалов обкладок окажется равной

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_x d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{q}{\varepsilon_0 S} d \ ,$$

откуда

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \tag{4}$$

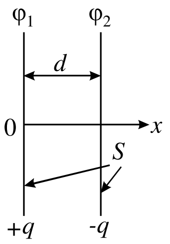


Рис. 2

где, как это явствует из рис. 2, S — площадь каждой из пластин, а d — расстояние между ними.

§ 8.17. Соединения конденсаторов

Рассмотрим кратко два простейших способа соединения нескольких конденсаторов — последовательное и параллельное (рис. 3, а и б). Возникает вопрос: может ли каждая из этих батарей быть заменена одним эквивалентным конденсатором и, если да, то какова его ёмкость? Да, гласит ответ, может. При этом оказывается, что

$$\frac{1}{C_{посл}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}, \tag{5}$$

$$C_{пар} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n. \tag{6}$$

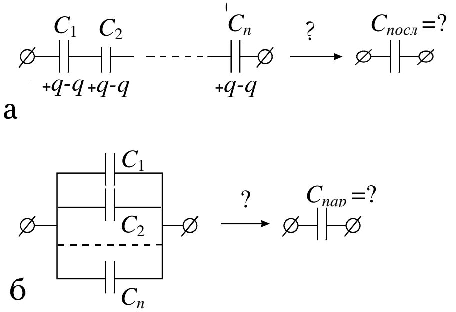


Рис. 3

Для доказательства первой формулы учтем, что каждый из цепочки последовательно соединённых конденсаторов при подаче напряжения зарядится одним и тем же зарядом q (если, конечно, все они первоначально были разряжены). В самом деле, если на внутренней поверхности левой обкладки конденсатора C_1 (рис. 3, а) появится заряд $+q$, то на внутренней поверхности правой его обкладки — очевидно, заряд $-q$. Эта система зарядов, как было показано в предыдущем параграфе, поля вне конденсатора C_1 не создаёт. Поскольку правая обкладка C_1 не заряжена, на ней высвободится заряд $+q$, который должен где-то разместиться. Предположим, что он *целиком* перейдет на внутреннюю сторону левой обкладки конденсатора C_2. Тогда на внутренней стороне правой его обкладки индуцируется заряд $-q$ и т. д. Ни на соединительных проводах, ни на внешних сторонах обкладок, *по предположению*, избыточных зарядов не образуется. Но в силу теоремы единственности именно такое распределение и будет иметь место, ибо оно не создаёт поля ни в одном из рассматриваемых проводников.

Теперь уже нетрудно получить выражение для эквивалентной ёмкости цепочки. Действительно, разность потенциалов между её концами равна, очевидно,

$$\Delta\varphi = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \frac{1}{C_1}q + \frac{1}{C_2}q + \cdots + \frac{1}{C_n}q = (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n})q$$

и пропорциональна заряду q, откуда и следует формула (5).

Доказательство почти очевидной формулы (6) мы предоставляем читателю провести самостоятельно.

§ 8.18. Сложные конденсаторы[1]

Проиллюстрируем возможности использования метода наложения ещё на одном примере, позволяющем обобщить понятие ёмкости на случай более чем двух заряженных проводников. Такая система проводников, если в область, где они создают поле, не проникают внешние поля, называется сложным конденсатором.

Как было показано, потенциал уединённого проводника всегда пропорционален его заряду. Для неуединённого проводника, вообще говоря, это неверно. Однако в одном-единственном случае и у неуединённого проводника эта пропорциональность сохраняется. Этот случай соответствует ситуации, когда рассматриваемый проводник окружён системой *незаряженных* проводников (и ничего больше кругом нет). Действительно, если на проводник 1 поместить заряд q_1 (рис. 4), то в окружающем пространстве возникнет электрическое поле. Это поле вызовет перераспределение зарядов на остальных проводниках, и каждый из них тоже создаст вокруг себя какое-то поле. Посредством этих полей все проводники будут влиять друг на друга (в том числе и на проводник 1), и в итоге на каждом устано-

[1] Этот параграф без ущерба для понимания дальнейшего материала можно опустить.

вится вполне определённая плотность поверхностного заряда $\sigma_i(M)$, такая что полное поле внутри каждого проводника обратится в нуль. По теореме единственности других распределений, удовлетворяющих этому условию, не существует.

Удвоим теперь заряд проводника 1. При этом, чтобы поле внутри любого из них осталось нулевым, достаточно предположить, что все $\sigma_i(M)$ тоже удвоятся[1]. В самом деле, удвоенные распределения $2\sigma_i(M)$ удвоят вклад $\Delta\boldsymbol{E}_j$ каждого малого кусочка поверхностного заряда в общее поле, не меняя его по направлению. Поэтому там, где его не было (т. е. внутри всех проводников), оно и не возникнет. Таким образом, сделанное предположение является верным и по теореме единственности единственно возможным, и распределения $\sigma_i(M)$ на поверхности каждого проводника действительно удвоятся. Это повлечёт за собой удвоение величин поля и потенциала в любой точке, занятой полем. В том числе удвоятся и потенциалы рассматриваемых проводников. Другими словами, потенциалы всех незаряженных проводников и проводника 1 оказываются пропорциональными заряду q_1 этого одного проводника:

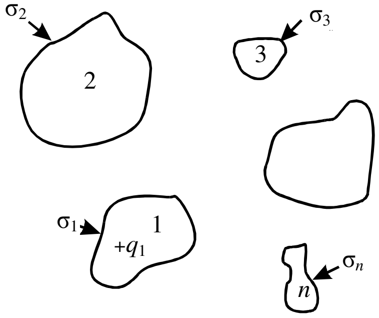


Рис. 4

$$\varphi_1 = p_{11}q_1,\ \ \varphi_2 = p_{21}q_1,\ \ \varphi_n = p_{n1}q_1,$$

где постоянные p_{11}, p_{21},..., p_{n1} называются потенциальными коэффициентами и определяются геометрией системы. Заряжая последовательно проводники 2, 3,..., n зарядами q_2, q_3, ..., q_n и оставляя при этом *все остальные проводники незаряженными*, получим аналогичные соотношения:

$$\varphi_1 = p_{12}q_2,\ \ \varphi_2 = p_{22}q_2,\ \ \varphi_n = p_{n2}q_2\,,$$

....

$$\varphi_1 = p_{1n}q_n,\ \ \varphi_2 = p_{2n}q_n,\ \ \varphi_n = p_{nn}q_n.$$

[1] Если не сообщать проводнику дополнительного заряда, то $\sigma(M)$ может удвоиться в каждой точке лишь в том случае, когда этот проводник не заряжен. Таким образом, условие незаряженности всех проводников, кроме первого, на котором удваивают заряд, является существенным.

Наложим теперь все рассмотренные распределения заряда друг на друга. Поскольку каждое из них не даёт поля ни в одном из проводников, простая их суперпозиция (без взаимного искажения) его там также не даст. А это и значит, что именно такая суперпозиция будет иметь место, если систему проводников зарядить произвольными зарядами q_1, q_2, ..., q_n. Тогда все поля и потенциалы наложатся, и для потенциала каждого проводника в общем случае (когда остальные тоже заряжены) можно написать:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + \ldots + p_{1n}q_n, \\ \varphi_2 &= p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + \ldots + p_{2n}q_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n &= p_{n1}q_1 + p_{n2}q_2 + \ldots + p_{nn}q_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Решая эту систему относительно переменных q_i, получим

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \ldots + C_{1n}\varphi_n, \\ q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \ldots + C_{2n}\varphi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= C_{n1}\varphi_1 + C_{n2}\varphi_2 + \ldots + C_{nn}\varphi_n, \end{aligned} \tag{8}$$

где константы C_{ij} называются ёмкостными коэффициентами и выражаются через потенциальные коэффициенты p_{ij}. Отметим, что коэффициент C_{11}, например, как это явствует из приведенных рассуждений, не совпадает с ёмкостью уединённого проводника 1 (т. е. когда остальные проводники устранены). Ёмкостные коэффициенты (как и потенциальные) оказываются связанными друг с другом. Можно показать, что

$$C_{ij} = C_{ji}\,, \tag{9}$$

$$p_{ij} = p_{ji}\,,$$

на чём, однако, мы останавливаться не будем.

ДИЭЛЕКТРИКИ

Диэлектриками или изоляторами мы будем называть тела, не проводящие электричества, в которых, в противоположность проводникам, концентрация свободных носителей заряда $n \to 0$. В хороших изоляторах при обычных температурах она составляет величину ~ $10^3 \div 10^4$ 1/см^3, т. е. почти на 20 порядков ниже, чем в металлах. Таким образом, влияние свободных зарядов на свойства диэлектрика практически всегда оказывается пренебрежимо малым по сравнению с воздействием любого другого фактора на эти свойства[1]. Типичными представителями диэлектриков являются стекло, резина, различные виды пластмасс.

§ 8.19. Диэлектрическая проницаемость

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, то на первый взгляд кажется, что с ним ничего не произойдет. Однако ещё Фарадей обнаружил, что при заполнении диэлектриком пространства между пластинами плоского конденсатора его ёмкость возрастает в некоторое число раз:

$$C = \varepsilon C_0, \qquad (10)$$

где C_0 и C — ёмкости конденсатора соответственно без диэлектрика и с ним, а $\varepsilon > 1$ — константа, зависящая от свойств диэлектрика и называемая его диэлектрической проницаемостью.

Увеличение ёмкости означает только одно: диэлектрик возбуждает собственное поле, которое ослабляет поле обкладок. При этом разность потенциалов между ними падает и ёмкость как раз возрастает.

Очень похожая картина возникает, если параллельно обкладкам ввести незаряженную проводящую пластину небольшой толщины (рис. 5). Она «занулит» поле внутри себя, а снаружи его не изменит. Тогда разность потенциалов при том же заряде q станет равной

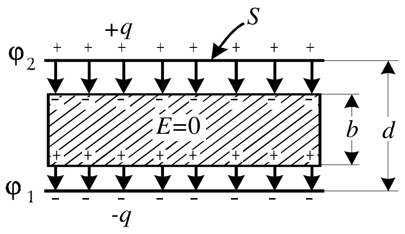


Рис. 5

$$\varphi_2 - \varphi_1 = E(d - b) = \frac{q}{\varepsilon_0 S}(d - b),$$

а ёмкость

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d - b}$$

возрастёт в $\dfrac{d}{d - b}$ раз. Можно ввести внутрь несколько таких пластин. Результат, очевидно, не зависит от того, сколько их там и где они расположены, лишь бы их суммарная толщина равнялась b и все они были парал-

[1] Напомним, что в проводниках, напротив, концентрация свободных зарядов «стремится к бесконечности», т. е. их заведомо хватит, чтобы скомпенсировать любое наперед заданное сколь угодно большое поле. Между проводниками и изоляторами существует обширный класс веществ, называемых полупроводниками.

лельны обкладкам. Это наводит на мысль представить диэлектрик состоящим из чередующихся тонких проводящих и непроводящих слоев; тогда его диэлектрическая проницаемость будет определяться долей его объёма, занятой проводником. Но такой диэлектрик вопреки наблюдениям сразу получается анизотропным, имеющим разные свойства по различным направлениям: вдоль пластин он вообще становится проводником, а «работает» так, как мы описали, только в перпендикулярном к ним направлении. Эту трудность, однако, можно обойти, предположив, что изолятор содержит внутри себя проводящие участки, например, в виде маленьких шариков, разделённых непроводящими областями (рис. 6). Тогда он окажется уже изотропным, что характерно для большинства диэлектриков.

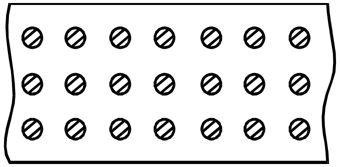


Рис. 6

При помещении во внешнее поле такого диэлектрика внутри каждого шарика наводятся индуцированные заряды противоположных знаков и он начинает действовать, как диполь. Эта модель была одной из первых, предложенных для объяснения ослабления поля в диэлектрике. В основных чертах она сохранилась и до настоящего времени (несколько видоизменившись).

§ 8.20. Поляризация диэлектриков

Каков механизм ослабления поля в диэлектрике с точки зрения современной модели? Для ответа на этот вопрос привлечём самые общие сведения о строении его молекул. Как известно, положительный заряд ядер всех атомов, входящих в состав молекулы, компенсируется равным по величине отрицательным зарядом их электронных оболочек. Для многих типов молекул центры[1] их положительных и отрицательных зарядов совпадают, и молекулы не возбуждают вокруг себя никакого поля (рис. 7, а). При включении внешнего поля положительные заряды молекулы в среднем смещаются вдоль поля, отрицательные же — навстречу ему и эти центры перестают совпадать (рис. 7, б). Такая деформированная молекула уже начинает создавать собственное поле, и если

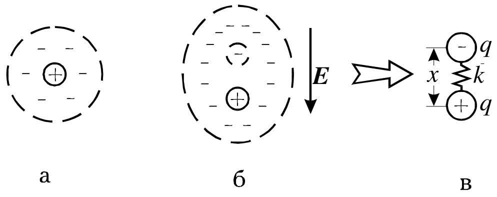


Рис. 7

[1] Центр произвольного распределения точечных зарядов определяется по формулам, аналогичным (26л2) для центра масс системы материальных точек.

посмотреть на неё издали, то она будет эквивалентна диполю с зарядами $\pm q$, смещёнными на некоторое расстояние x. При не очень больших внешних полях смещение это естественно считать пропорциональным величине поля, и мы приходим к простейшей модели молекулы диэлектрика, представленной на рис. 7, в и состоящей из двух заряженных шариков на упругой пружинке жёсткостью k. Расстояние x между шариками определяется законом Гука

$$x = \frac{qE}{k} \tag{11}$$

и зависит, помимо действующего поля E, от параметров молекул q и k, характерных для данного их сорта.

Какое же влияние окажет диэлектрик, состоящий из таких молекул, на поле внутри плоского конденсатора? Ввиду однородности внешнего поля и самогó диэлектрика пружинки каждой его молекулы одинаково растянутся и все заряды сместятся на одну и ту же величину. Если мысленно соединить все заряды одного знака жёсткими стерженьками, то при сдвиге полученных плюс- и минус- «скелетов» друг относительно друга

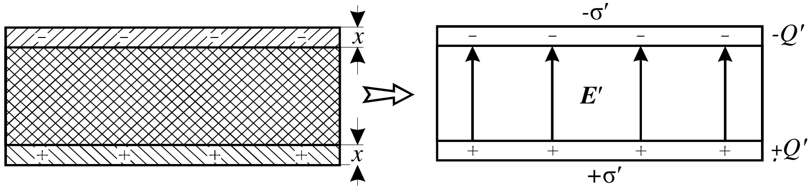


Рис. 8

заряды в толще диэлектрика окажутся по-прежнему поровну и равномерно перемешанными; на поверхностях же его выделятся нескомпенсированные и равные по величине заряды противоположного знака (рис. 8). Они-то и будут создавать поле, направленное, очевидно, навстречу внешнему и, следовательно, ослабляющее его. Явление, в результате которого каждый малый элемент объёма диэлектрика превращается в диполь, называется поляризацией. Для простейшего случая плоского диэлектрика в однородном поле его поляризация свелась, как мы видели, к появлению лишь поверхностного заряда. Этот так называемый поляризационный, или связанный, заряд создаёт вполне «нормальное» кулоновское поле и отличается от свободного, находящегося на проводнике, только тем, что не может свободно перемещаться. Его нельзя снять с поверхности диэлектрика, а при выключении внешнего поля он уйдет вглубь изолятора и там нейтрализуется.

Итак, роль диэлектрика сводится к наложению поля $\boldsymbol{E}'$ связанных зарядов, расположенных в нашем случае на его поверхностях, на внешнее

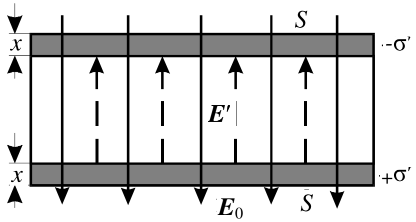


Рис. 9

поле $\boldsymbol{E}_0$ (рис. 9). При этом внешнее поле ослабится и внутри диэлектрика будет действовать поле, величина которого

$$E = E_0 - E'. \qquad (12)$$

Именно это поле и будет растягивать пружинки молекул. Если площадь перпендикулярной полю поверхности диэлектрика равна S, а концентрация молекул внутри него n, то на каждой такой поверхности в результате поляризации выделится заряд (соответствующего знака)

$$Q' = qnSx\,,$$

так что его поверхностная плотность

$$\sigma' = \frac{Q}{S} = qnx\,,$$

или, с учётом (11),

$$\sigma' = \frac{q^2 n}{k} E\,.$$

Таким образом, поляризационный заряд, ослабляющий поле в соответствии с (12), в свою очередь сам определяется этим ослабленным полем E и пропорционален ему. Поэтому для нахождения E мы получаем следующее уравнение:

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{q^2 n}{k\varepsilon_0} E = E_0 - \alpha E,$$

где $\alpha = \dfrac{q^2 n}{k\varepsilon_0}$ — константа, называемая диэлектрической восприимчивостью и зависящая только от свойств диэлектрика. Выражая отсюда E, получаем

$$E = \frac{E_0}{1+\alpha} = \frac{E_0}{\varepsilon}\,, \qquad (13)$$

где $\varepsilon = 1 + \alpha$ есть не что иное, как уже введенная нами диэлектрическая проницаемость. Действительно, по (13) ε показывает, во сколько раз поле в диэлектрике плоского конденсатора меньше поля тех же свободных зарядов в вакууме. В ε раз при этом уменьшается и разность потенциалов между обкладками конденсатора, а потому его ёмкость, в согласии с (10), возрастает тоже в ε раз.

А могут ли в диэлектрике возникнуть объёмные поляризационные заряды? Да, если поляризация неоднородна. Пусть, например, концентрация молекул диэлектрика меняется от точки к точке. Выделим внутри него произвольный объём ΔV (рис. 10). При включении поля $\boldsymbol{E}$ «плюсы» и «минусы» сместятся на некоторые расстояния и границу нашего объёма пересечёт определённое количество зарядов. С одной стороны поверхности в неё войдут «плюсы», а с другой — «плюсы» выйдут. Если концентрации n_1 и n_2 вблизи этих сторон различны (на рис. 10 $n_1 > n_2$), то войдёт и выйдет разное число «плюсов» и внутри ΔV появится некий избыточный заряд. Одновременно, конечно, эту поверхность будут пересекать и «минусы», причём оба фактора, очевидно, работают в одном направлении: там, где внутрь входит больше «плюсов», изнутри выходит больше «минусов» и наоборот. Таким образом, внутри диэлектрика появляются объёмные поляризационные заряды.

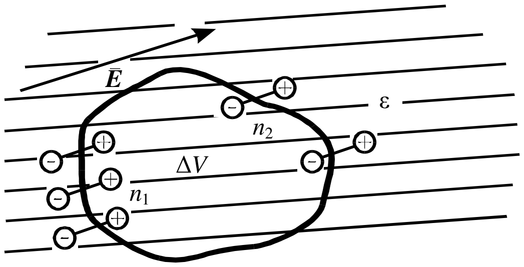


Рис. 10

Подобный эффект может наблюдаться и в однородном диэлектрике, заполняющем не всё поле. При этом с одной стороны выделенной замкнутой поверхности (где поле больше) заряды сместятся на большее расстояние, чем с другой. Это значит, что внутрь ΔV с одной стороны будут проникать заряды из более толстого приповерхностного слоя, чем выходить из него с противоположной, и внутри ΔV может появиться избыточный заряд. Однако такое происходит не всегда. Можно показать, что, например, для симметричных (неоднородных) сферического и цилиндрического полей в однородном диэлектрике в форме соответственно концентрического шарового и коаксиального цилиндрического слоёв не возникает объёмных зарядов, а поле уменьшается в ε раз только за счет поляризационных зарядов, образующихся на их границах[1]. В общем, это более сложные случаи, на которых мы подробнее останавливаться не будем.

Кроме рассмотренного типа диэлектриков, молекулы которых могут быть представлены квазиупругими диполями (т. е. шариками на пружинках), существует ещё один класс изоляторов с молекулами в виде жёстких

[1] См., кроме того, следующий параграф.

диполей. У таких молекул центры положительного и отрицательного зарядов не совпадают, и даже в отсутствие внешнего воздействия они создают вокруг себя электрические поля (поля диполей). Однако благодаря тепловому движению такие молекулы-диполи ориентированы совершенно хаотически и результирующее их поле оказывается равным нулю. При наложении же внешнего поля появляется некая упорядоченность в их расположении, а вместе с ней и собственное поле диэлектрика, которое направлено навстречу внешнему и ослабляет его. Чем больше это последнее, тем выше упорядоченность в расположении молекул (тепловое движение стремится её разрушить) и тем больший вклад в общее поле вносит сам диэлектрик. Можно показать, что и в этом случае (жёстких диполей) при не очень сильных полях собственное поле диэлектрика получается пропорциональным внешнему, а потому всё сказанное об изоляторах с квазиупругими молекулами справедливо и по отношению к жёсткодипольным диэлектрикам.

§ 8.21. Электрическое поле в однородном диэлектрике

Для расчёта поля любой системы зарядов в произвольной среде можно пользоваться полной системой уравнений электростатики (7л11). При этом в правую часть теоремы Гаусса нужно включить полный заряд, находящийся внутри выбранной замкнутой поверхности. В него, конечно, будут давать вклад и поляризационные заряды, могущие возникнуть в объёме диэлектрика, расположенного внутри этой поверхности. Можно, однако, преобразовать уравнение таким образом, чтобы в него входили лишь *свободные* заряды, находящиеся на проводниках, а влияние диэлектрика учитывалось бы введением его проницаемости ε. Для случая *однородного* диэлектрика, заполняющего *всё* пространство, занятое полем, преобразованное уравнение оказывается весьма простым и система основных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \sum\limits_S E_{ni}\Delta S_i = \dfrac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \\ \sum\limits_\Gamma E_{li}\Delta l_i = 0 \end{cases} \tag{14}$$

соответственно для любой замкнутой поверхности S и любого замкнутого контура Γ[1]. Под q здесь понимается, как отмечалось, *свободный* заряд внутри S. Из (14) следует, что *в объёме* диэлектрика в этом случае поляри-

[1] Электростатическое поле останется потенциальным, очевидно, и в присутствии диэлектрика, так что второе основное уравнение не изменится.

зационные заряды не возникают и для произвольной системы (свободных) зарядов поле $\boldsymbol{E}$ и потенциал φ в любой точке уменьшаются в ε раз:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon}, \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{\varepsilon}, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{E}_0$ и φ_0 — соответственно поле и потенциал, создаваемые теми же свободными зарядами в вакууме. Ёмкость любого конденсатора возрастёт при этом тоже в ε раз.

Следует иметь в виду, что эти простые соотношения (14) и (15) справедливы только для однородного диэлектрика, заполняющего всё поле. В общем случае неоднородного произвольно ограниченного диэлектрика они оказываются совершенно неприменимыми. В качестве примера подобной ситуации рассмотрим продолговатый кусок диэлектрика, помещённый в поле точечного заряда $+q$ (рис. 11). В точках M_1 и M_2 благодаря поляризации диэлектрика поле не ослабнет, как того требует формула (15), а, наоборот, усилится (но, конечно, не в ε раз). В точке же M_3 поляризация диэлектрика вызовет ослабление первоначального поля заряда q. В точках в стороне от штриховой оси диэлектрик изменит первоначальное поле не только по величине, но и по направлению. Этот пример показывает, насколько усложняется картина поля и его уравнения в неоднородном диэлектрике (рассматриваемый брусок с проницаемостью ε можно, очевидно, считать неоднородностью воздушного диэлектрика, заполняющего всё пространство).

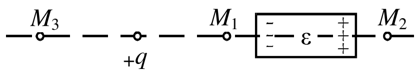


Рис. 11

Приведём ещё один пример, но уже более простой системы, поддающейся элементарному расчёту. Найдём поляризационные заряды, возникающие в диэлектрике с проницаемостью ε, заполняющем всё пространство между обкладками заряженного зарядами $\pm q$ сферического конденсатора (рис. 12).

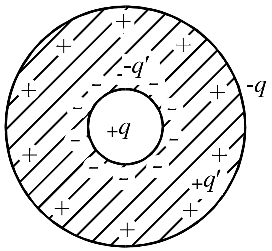


Рис. 12

Поскольку диэлектрик заполняет всю область, занятую полем, в соответствии с (14) объёмных поляризационных зарядов в нём не возникает, а появляются лишь поверхностные заряды $\pm q'$, выделяющиеся на его границах. Они возбуждают собственное поле E', ослабляющее поле E_0 свободных зарядов в ε раз. Таким образом, с одной стороны, в любой точке внутри диэлектрика поле

$$E = E_0 - E',$$

с другой — то же самое поле

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Приравнивая, получаем

$$E_0 - E' = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

откуда

$$E' = E_0(1 - \frac{1}{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_0.$$

Поле E создаётся свободным зарядом, размещённым на внутренней сфере (заряды внешней сферы поле внутри неё не возбуждают), а поле E' — расположенным там же связанным зарядом q':

$$E_0 = \frac{q}{r^2}, \quad E' = \frac{q'}{r^2}$$

(в системе СГСЭ), где r — расстояние от рассматриваемой точки до центра сфер. Отсюда сразу находим

$$q' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q .$$

Равный заряд противоположного знака выделится, очевидно, на внешней сфере (ибо в целом диэлектрик электронейтрален).

Контрольные вопросы и задания

1. Показать, что потенциал уединённого проводника пропорционален его заряду.
2. Можно ли говорить об электроёмкости непроводника? Если да, то как её определить, если нет — почему?
3. Показать, что при заключении заряженного проводника в замкнутую проводящую оболочку электрические поля внутри и вне оболочки оказываются никак не связанными друг с другом.
4. Что такое конденсатор? Что называется его ёмкостью? Найти ёмкость плоского конденсатора.
5. Показать, что при последовательном подключении к источнику нескольких конденсаторов *различной* ёмкости каждый из них за-

ряжается *одним и тем же* зарядом.

6. Найти ёмкости последовательно и параллельно соединённых конденсаторов.
7. Дать определение диэлектрика. Что произойдёт с ёмкостью плоского конденсатора, если внутрь поместить диэлектрик? Как это объясняется «моделью проводящих шариков»?
8. В чём состоит современная классическая модель диэлектрика?
9. Объяснить ослабление поля в диэлектрике, состоящем из квазиупругих диполей. Получить зависимость ε от параметров диэлектрической среды, рассматривая плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком.
10. Могут ли в диэлектрике образоваться объёмные заряды?
11. Как ведёт себя в электрическом поле изолятор с молекулами в виде жёстких диполей?
12. Написать полную систему уравнений электрического поля в однородном диэлектрике, заполняющем всё поле.
13. Привести пример ситуации, когда введение в поле диэлектрика приводит к возрастанию величины поля (тех же свободных зарядов) в каких-то областях.