Лекция 10

§ 8.5. Поле «бесконечной» заряженной плоскости

Проиллюстрируем применение теоремы Гаусса на очень важном примере системы зарядов, расположенных на «бесконечной» плоскости, небольшой участок, которой изображён на рис. 1. Под «бесконечной» следует понимать плоскость, размеры которой много больше расстояний, на которых мы интересуемся её действием (т. е. мы находимся всегда близко к плоскости и далеко от её краев).

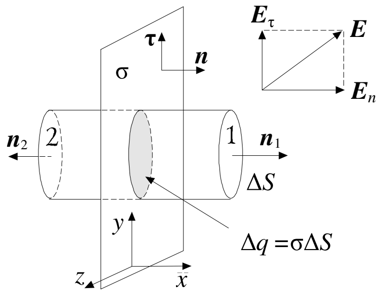

Рис. 1

Назовём поверхностной плотностью σ заряда в данной точке M заряд Δq, приходящийся на единицу площади поверхности ΔS в окрестности этой точки, точнее, предел отношения Δq к ΔS:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \qquad (1)$$

Пусть рассматриваемая плоскость заряжена равномерно, т. е. $\sigma(M) = const$ для всех её точек, находящихся далеко от краёв.

Вообще, прежде чем приступать к определению полей с помощью теоремы Гаусса, необходимо привести и использовать все соображения симметрии, связанные с особенностями данного распределения зарядов и позволяющие получить в ряде случаев очень существенную информацию о характере рассчитываемого поля. Что означает найти поле вектора $\boldsymbol{E}$ в какой-либо области пространства? Это значит определить его величину и направление в каждой точке рассматриваемой области, или (что фактически то же) найти три его проекции на оси координат (например E_x, E_y, E_z), каждая из которых, вообще говоря, является функцией трёх переменных (x, y, z):

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \{E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z)\}.$$

Если в распределении заряда имеется симметрия, то искомые проекции вектора $\boldsymbol{E}$ могут зависеть не от всех координат, а некоторые из этих проекций, возможно, окажутся равными нулю.

В нашем случае бесконечной равномерно заряженной плоскости, очевидно, параллельная ей тангенциальная составляющая поля $\boldsymbol{E}_\tau$ как раз обращается в нуль (у плоскости нет выделенного тангенциального направления):

$$E_\tau = 0, \text{ т. е. } E_y = E_z = 0, \tag{2}$$

а нормальная проекция E_n не может зависеть от координат y и z ввиду тождественности физических условий во всех точках, равноотстоящих от плоскости:

$$E_n(x, y, z) = E_n(x). \tag{3}$$

Далее, вектор $\boldsymbol{E}$ по разные стороны от плоскости должен, очевидно, «смотреть» в разные стороны, т. е.

$$E_x(x) = -E_x(-x). \tag{4}$$

Итак, после использования соображений симметрии, осталась только одна (нормальная) составляющая поля, могущая зависеть лишь от одной координаты — расстояния до плоскости.

Теперь можно применить теорему Гаусса. Для этого выберем так называемую гауссову поверхность, через которую удобно считать поток. Такой поверхностью, очевидно, является прямой цилиндр с перпендикулярной плоскости образующей и равноотстоящими от неё основаниями (рис. 1). Поток вектора $\boldsymbol{E}$ через боковую поверхность этого цилиндра в соответствии с (2) равен нулю, поток же через основания определяется искомой проекцией поля E_n. Таким образом, поток через всю поверхность цилиндра

$$N = N_1 + N_2,$$

где N_1 и N_2 — потоки через основания 1 и 2. Поскольку при переходе от основания 1 к основанию 2 и внешняя нормаль к поверхности, и поле $\boldsymbol{E}$ меняют направления на противоположные, потоки эти оказываются одного знака (и равными друг другу) и

$$N = 2N_1 = 2E_n \Delta S,$$

где ΔS — площадь основания цилиндра. По теореме Гаусса этот поток равен делённому на ε_0 заряду $\sigma\Delta S$, находящемуся внутри[1] цилиндра:

[1] Заряды, расположенные вне цилиндра, разумеется, будут давать вклад в *поле* на его поверхности, но *поток* через неё определяется, в полном соответствии с теоремой Гаусса, только зарядом, находящимся внутри. Если устранить всю плоскость, оставив лишь её участок ΔS внутри цилиндра, то поток через него не изменится, хотя условия (2) и (3), являющиеся следствием симметрии поля, конечно, нарушатся. Поток перераспределится по поверхности цилиндра, и все дальнейшие рассуждения, а вместе с ними и конечная формула (5), окажутся несправедливыми.

$$2E_n\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S\ ,$$

откуда

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{5}$$

и *не зависит* от расстояния до плоскости.

Этот же результат, конечно, может быть получен и с помощью закона Кулона путем суммирования полей, создаваемых всеми малыми участками заряженной плоскости. Но почему же тогда поле не спадает при удалении от зарядов? Да потому что плоскость бесконечна. Наиболее существенный вклад в поле дают заряды, находящиеся в близком к 2π телесном угле Ω (рис. 2). Если разбить этот угол на малые части $\Delta\Omega_i$, то при увеличении расстояния до плоскости в n раз каждый её участок (а следовательно, и его заряд Δq_i), соответствующий какому-то $\Delta\Omega_i$, возрастёт, очевидно, в n^2 раз, так что его поле $\Delta E_i \sim \dfrac{\Delta q_i}{r_i^2}$, оставаясь неизменным по направлению, не изменится и по величине и суммарное поле оказывается также не зависящим от x. Поскольку, однако, при этом в игру вовлекаются всё новые и новые участки плоскости, такая ситуация будет продолжаться до тех пор, пока плоскость «не кончится». С этого момента E начинает слабо, а затем всё сильнее зависеть от x, переходя на совсем больших расстояниях (много бóльших размеров плоскости) в известную зависимость поля точечного заряда $E \sim 1/x^2$.

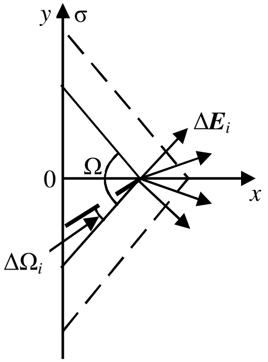

Рис. 2

§ 8.6. Проводники в электрическом поле

Проводниками мы будем называть тела, содержащие внутри себя достаточно большое количество свободных зарядов, могущих прийти в движение под действием сколь угодно малой силы. Хорошими проводниками оказываются металлы, в которых свободными зарядами, или носителями (электричества), являются электроны, образующие, как говорят, электронный газ. При обычных температурах концентрация n их огромна: $n \sim 10^{22} \div 10^{23}$ 1/см^3.

Удерживают электроны внутри металла так называемые сторонние силы, действующие на его поверхности. Силы эти возникают благодаря квантовым эффектам и с классической точки зрения могут считаться силами неэлектростатического происхождения. Действие их оказывается вполне аналогичным реакции связи в механике, так что поверхность проводника представляет собой как бы непроницаемую оболочку, внутри которой находится электронный газ.

1. Поле внутри проводника. Из определения проводника следует, что в случае равновесия зарядов электрическое поле внутри него должно быть равно нулю[1]. Если внести проводник во внешнее поле (рис. 3), то под его действием свободные носители внутри проводника придут в движение и возникнет электрический ток. Ток этот будет длиться до тех пор, пока внешнее поле $\boldsymbol{E}_e$ не скомпенсируется в каждой точке собственным полем $\boldsymbol{E}_i$ свободных зарядов, перераспределившихся внутри проводника[2]. Аналогичная картина будет наблюдаться и в том случае, если сообщить проводнику избыточный заряд. При этом, дойдя до поверхности, свободные носители почувствуют действие сторонних сил, которые не дадут им выйти за её пределы.

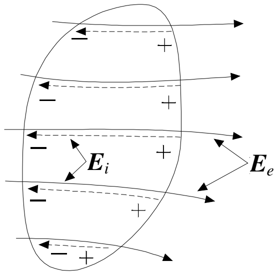

Рис. 3

Раз электрическое поле внутри проводника равно нулю, равен нулю и его поток через любую замкнутую поверхность, целиком расположенную в толще проводника. Стало быть, по теореме Гаусса равен нулю и (избыточный) заряд, расположенный внутри всякой такой поверхности. А это значит, что заряд, сообщенный проводнику или индуцированный, т. е. наведенный, на нём при внесении его во внешнее поле (за счёт перераспределения внутри него свободных носителей), может располагаться только на его поверхности, точнее в очень тонком поверхностном слое толщиной

[1] Речь идёт о поле, усредненном по объёму, много большему характерного объёма атомной структуры.

[2] Не следует опасаться, что свободных зарядов «не хватит». Именно в этом смысле следует понимать в определении проводника «достаточно большое» их количество. Что же касается самого распространенного класса проводников — металлов, то численные оценки показывают, что в них такая ситуация практически просто не осуществима (даже в самых сильных достижимых сегодня на практике полях остаётся запас по n на 6-7 порядков).

в несколько характерных размеров атома[1].

2. Поле снаружи на поверхности проводника. Покажем, что электрическое поле снаружи проводника в любой точке его поверхности определяется лишь поверхностной плотностью заряда в данной точке и не зависит явно от зарядов других участков этой поверхности[2]. Для этого рассмотрим в окрестности произвольной точки M малый участок поверхности проводника, который с достаточной точностью можно считать плоским (рис. 4). Пусть, кроме того, участок этот настолько мал, что плотность заряда и электрическое поле на всём его протяжении практически постоянны.

Построим гауссову поверхность — прямой цилиндр с основаниями площадью ΔS, параллельными выделенному участку поверхности проводника, и высотой $2h$ (см. рис. 4). Поток вектора $\boldsymbol{E}$ через поверхность этого цилиндра

$$N = N_1 + N_2 + N_{бок},$$

где N_1 и N_2 — потоки через основания 1 и 2, а $N_{бок}$ — поток через боковую поверхность $S_{бок}$ цилиндра. Поток через поверхность левой половины цилиндра, находящейся внутри проводника, очевидно, равен нулю (ведь там нет поля), так что $N_2 = 0$ и

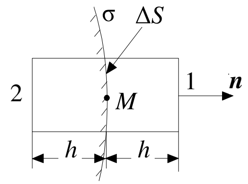

Рис. 4

$$N = N_1 + N_{бок} = E_{n1}S + N_{бок},$$

где E_{n1} — средняя нормальная проекция поля $\boldsymbol{E}$ на основании 1. По теореме Гаусса поток этот определяется зарядом внутри цилиндра:

$$E_{n1}\Delta S + N_{бок} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(M)\Delta S\ ,$$

где $\sigma(M)$ — поверхностная плотность заряда в точке M.

Будем теперь неограниченно уменьшать высоту цилиндра $2h$. При

---

[1] Как явствует из приведенных рассуждений, полученный результат вытекает из теоремы Гаусса, которая сама, как это уже отмечалось, является следствием точной двойки в показателе степени при r в законе Кулона. Если бы этот показатель был другим, то «всё нарушилось» бы: поток через любую замкнутую поверхность определялся бы зарядами, расположенными не только внутри неё, но и снаружи, он зависил бы от положений этих зарядов, от размеров и формы поверхности и т. п. Понятно, что одно поверхностное распределение заряда в этом случае будет не в состоянии «занулить» поле внутри проводника и для его компенсации заряду придётся распределиться как-то и по объёму проводника.

[2] Оно зависит от них косвенно: ведь сама плотность заряда в данной точке определяется внешними полями и полями, действующими со стороны остальных участков заряженной поверхности.

этом $N_{бок} \to 0$ (ибо $S_{бок} \to 0$), а поле E_{n1} будет приближаться к полю $E_n(M)$ в точке M проводника. В пределе, устремив $h \to 0$, получим

$$E_n(M)\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(M)\Delta S,$$

или после сокращения на ΔS

$$E_n(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}, \tag{6}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, нормальная составляющая поля снаружи в любой точке поверхности проводника действительно определяется только плотностью заряда в этой точке. Что же касается тангенциальной составляющей, то, как будет показано в следующем параграфе, она всегда равна нулю, так что выражением (6) поле определяется полностью.

Соотношение (6) очень похоже на формулу (5) для поля заряженной плоскости, только в нём нет двойки в знаменателе. Куда же она делась? Ведь, казалось бы, если подойти к поверхности проводника достаточно близко, то все участки этой поверхности «уйдут в бесконечность» и поле будет определяться лишь близлежащим плоским её кусочком. Однако это неверно. Действительно, поле кусочка $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, направленное справа и слева в разные стороны от него (рис. 5), будет давать вклад в общее поле $\boldsymbol{E}$, но этот вклад — не единственный. Ведь по одну сторону от кусочка внутри проводника оно равно нулю, и, значит, имеется ещё одна слагающая поля, в точности компенсирующая здесь поле кусочка. Эта слагающая, очевидно, и есть поле всех остальных зарядов, которое равно по величине полю кусочка и «уничтожит» его внутри проводника и удвоит снаружи (см. рис. 5).

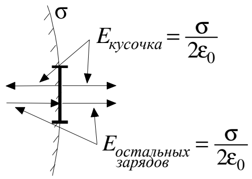

Рис. 5

§ 8.7. Работа электрических сил

Электрическое поле произвольной системы неподвижных зарядов является полем потенциальным. Это значит (см. § 2.7), что работа его по перемещению пробного заряда вдоль любой траектории не зависит от её формы, а определяется (помимо величины заряда) лишь положениями начальной и конечной её точек (или же работа вдоль любой замкнутой траектории равна нулю).

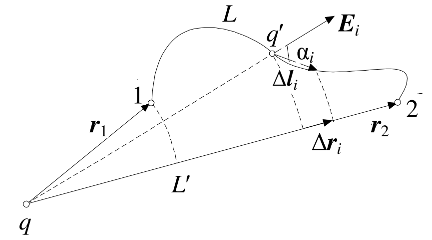

Рис. 6

Покажем сначала потенциальный характер поля точечного заряда. Пусть L — произвольная траектория, соединяющая точки 1 и 2, находящиеся в поле точечного заряда q (рис. 6). Проведём семейство концентрических сфер с центрами в источнике и разобьём ими всю траекторию на малые участки, которые приблизительно можно считать прямолинейными, а вектор $\boldsymbol{E}$ на каждом из них постоянным (рис. 6; направление $\Delta \boldsymbol{l}_i$ определяется направлением движения от 1 к 2). Этими же сферами луч, проходящий через q и точку 2, тоже разобьётся на части, причём каждому $\Delta \boldsymbol{l}_i$ будет соответствовать вполне определённый отрезок $\Delta \boldsymbol{r}_i$, находящийся от q на том же расстоянии. Нетрудно видеть, что элементарные работы ΔA_i и $\Delta A_i'$, совершаемые полем при перемещении пробного заряда q' вдоль соответственно $\Delta \boldsymbol{l}_i$ и $\Delta \boldsymbol{r}_i$ оказываются одинаковыми. Действительно,

$$\Delta A_i = q'(\boldsymbol{E}_i, \Delta \boldsymbol{l}_i) = q' \boldsymbol{E}_i \Delta l_E = q' E_i' \Delta r_{E'} = q'(E_i', \Delta \boldsymbol{r}_i) = \Delta A',$$

где E_i и E_i' — напряженности поля на i-х участках траекторий $1L2$ и $L'2$, а Δl_E и $\Delta r_{E'}$ (индекс "i" опущен) — проекции векторов $\Delta \boldsymbol{l}_i$ и $\Delta \boldsymbol{r}_i$ соответственно на направления $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$. Проекции эти, очевидно, равны, ибо участки $\Delta \boldsymbol{l}_i$ и $\Delta \boldsymbol{r}_i$ равноудалены от источника, а поле $\boldsymbol{E}$ радиально и зависит только от расстояния до него.

Стало быть, одинаковыми оказываются и полные работы, совершаемые вдоль кривой $1L2$ и соответствующего ей радиального отрезка $L'2$. Поскольку отрезок этот однозначно определяется положениями точек 1 и 2, работа вдоль любой другой траектории, соединяющей эти точки, будет, очевидно, той же[1], т. е. поле точечного заряда потенциально[2].

Переходя теперь к произвольной совокупности точечных зарядов, нетрудно видеть, что потенциальный характер поля сохранится. Действительно, поскольку работа поля каждого заряда вдоль любой замкнутой

---

[1] Если траектория эта очень извилиста, то некоторым её участкам $\Delta \boldsymbol{l}_i$ может соответствовать возвратное движение вдоль радиуса (соответствующий отрезок $\Delta \boldsymbol{r}_i$ на рис.6 имеет радиальную проекцию, направленную к центру). Однако каждому такому участку, очевидно, найдётся «противоположный», для которого $\Delta \boldsymbol{r}_i' = -\Delta \boldsymbol{r}_i$. Работы на них взаимно уничтожаются, и в итоге в полной работе останется лишь чистое перемещение вдоль $L'2$.

[2] Приведённые рассуждения, очевидно, доказывают потенциальность любого центрального поля.

траектории равна нулю, а работа суммы сил равна сумме их работ, нулевой получается и работа суммарного поля вдоль данной траектории.

Математически это условие может быть записано так: если Г — произвольная замкнутая траектория (контур), то

$$\sum_{\Gamma} E_{li}\Delta l_i = 0\,, \qquad (7)$$

где Δl_i — длина i-го участка, на которые разбита траектория, E_{li} — тангенциальная проекция вектора $\boldsymbol{E}$ на нём, а суммирование производится по всем участкам контура. Сумма, записанная в (7), называется *циркуляцией вектора* ***E*** *по контуру* Г. Таким образом, условием потенциальности поля является равенство нулю его циркуляции по любому замкнутому контуру.

Вернёмся теперь к уже частично решённой задаче об определении поля снаружи на поверхности проводника и найдём тангенциальную составляющую этого поля (нормальная дается формулой (6)). Из того, что $E_\tau = 0$ внутри проводника, не следует аналогичного равенства снаружи, ибо при переходе через поверхность эта составляющая поля может, в принципе, испытывать скачок (как, например, испытывает его нормальная составляющая). Покажем, тем не менее, что этого скачка нет, т. е. что снаружи на поверхности проводника

$$E_\tau = 0. \qquad (8)$$

Для этого в малой окрестности произвольной точки M поверхности проводника (которую с достаточной точностью можно считать плоской) построим малый прямоугольный контур Г (рис. 7), стороны 12 и 34 которого (длиной Δl) параллельны поверхности и лежат по разные стороны от неё, а стороны 14 и 23 (длиной Δh) перпендикулярны ей. Зададим произвольно направление обхода этого контура и посчитаем вдоль него циркуляцию вектора $\boldsymbol{E}$:

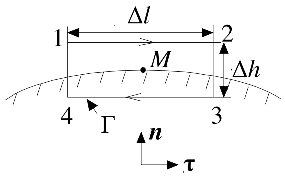

Рис. 7

$$\sum_{\Gamma} E_{li}\Delta l_i = E_{\tau 12}\Delta l - E_{\tau 43}\Delta l + \delta_{верт}\,,$$

где $E_{\tau 12}$ и $E_{\tau 43}$ — средние проекции вектора $\boldsymbol{E}$ на касательное направление $\boldsymbol{\tau}$ соответственно на участках 12 и 34 контура Г, а $\delta_{верт}$ — вклад в циркуляцию вертикальных его участков 23 и 41. Ввиду потенциальности поля $\boldsymbol{E}$ эта циркуляция должна быть равна нулю.

Будем теперь неограниченно уменьшать Δh, оставляя отрезки 12 и 34 контура по разные стороны от поверхности. При этом, очевидно, $\delta_{верт}\to 0$, а значения $E_{\tau 12}$ и $E_{\tau 43}$ будут всё ближе подходить к их значениям в точке M снаружи и внутри проводника. В пределе получим

$$\sum_{\Gamma} E_{li}\Delta l_i = [E_{\tau 12}(M) - E_{\tau 43}(M)]\Delta l = 0\,,$$

откуда

$$E_{\tau 12}(M) = E_{\tau 43}(M)\,^{1}.$$

Поскольку это соотношение выполняется при произвольной ориентации контура Г и всегда $E_{\tau 43}(M) = 0$ (ибо отрезок 43 находится внутри проводника), отсюда и вытекает справедливость формулы (8).

§ 8.8. Энергия заряда во внешнем поле. Разность потенциалов

Доказанная консервативность электрических сил позволяет ввести понятие потенциальной энергии заряда во внешнем поле (см. § 2.7). *Под потенциальной энергией* $U(M)$ *точечного заряда в какой-либо точке* M поля *понимается работа* $A_{M\to O}$, *совершаемая электрическими силами при перемещении этого заряда* (по любой траектории) *из данной точки в нулевую* (потенциальная энергия которой принимается за нуль):

$$U(M) \equiv A_{M\to O}.$$

Обычно (но не всегда) нулевая точка выбирается на бесконечности.

Поскольку сила, действующая на заряд в любой точке поля, пропорциональна его величине q', пропорциональной заряду оказывается и его энергия во внешнем поле. Поэтому отношение этой энергии к величине заряда не зависит от q', а является характеристикой лишь электростатического поля в данной точке[2]. Она называется потенциалом электростатического поля.

Чтобы избавиться от некоторой неопределённости, связанной с произволом выбора нулевой точки, обычно дают строгое определение разности потенциалов: *разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ *между двумя* (первой и второй) *точками поля называется работа* A_{12} *сил этого поля по перемещению пробного заряда* q' *из первой точки во вторую, отнесённая к величине этого заряда:*

[1] Это условие, как следует из приведённых рассуждений, является универсальным и справедливо для любой границы раздела сред.

[2] Характеристика эта, разумеется, зависит от значения электрического поля в других точках, через которые нужно проносить пробный заряд для вычисления работы.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{q'} A_{12}\,. \tag{9}$$

Отсюда вытекает, что *приращение* потенциала

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{q'} A_{12}\,. \tag{9$'$}$$

При этом, конечно, как это следует из определения пробного заряда, предполагается, что все остальные заряды, возбуждающие поле, остаются неподвижными.

Если нулевую точку выбрать на бесконечности, то потенциал произвольной точки M поля будет равен, очевидно, работе сил поля, отнесённой к единице заряда, при перемещении его из этой точки в бесконечность:

$$\varphi\,(M) = \varphi\,(M) - 0\; = \frac{1}{q'} A_{M\to\infty}\,.$$

С введением понятия потенциала выражение для энергии любого заряда q во внешнем поле принимает физически совершенно ясную форму

$$U(M) = q\;\varphi(M), \tag{10}$$

где $U(M)$ и $\varphi(M)$ — значения соответственно энергии заряда и потенциала поля в точке M. Правда, для нахождения энергии по этой формуле необходимо знать распределение потенциала внешнего поля, созданного данной совокупностью зарядов.

§ 8.9. Потенциал поля произвольной системы зарядов

Рассмотрим сперва уединённый точечный заряд q и посчитаем разность потенциалов между двумя произвольными точками M и N, находящимися в его поле (рис. 8), пользуясь её определением (9). Для расчёта работы выберем траекторию $MM'N$, участок MM' которой лежит на сфере радиусом r_1, а остальная часть $M'N$ идёт вдоль луча, проходящего через q и более далёкую точку N. Поскольку поле в каждой точке дуги MM' перпендикулярно ей, работа на этом участке не совершается и

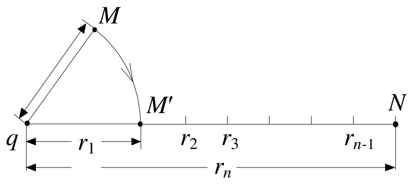

Рис. 8

$$A_{MN} = A_{M'N}\,.$$

Найдём теперь работу $A_{M'N}$. Для этого разобьём отрезок $M'N$ на $(n-1)$ малых частей, таких чтобы поле в пределах каждой части менялось незначительно (см. рис. 8). Работа на первом малом участке

$$\Delta A_1 = q'E_{r1}(r_2 - r_1),$$

где E_{r1} — радиальная проекция поля на первом участке, которая, очевидно, соответствует r, заключённому где-то между r_1 и r_2. Выберем в качестве этого r среднее геометрическое расстояний r_1 и r_2, т. е. положим

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1 r_2}.$$

Тогда работа

$$\Delta A_1 = q'\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}(r_2 - r_1) = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Напишем аналогичные выражения для элементарных работ на остальных участках траектории $M'N$ и сложим их:

$$A_{MN} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right) = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n}\right).$$

Отсюда разность потенциалов между точками M и N

$$\varphi_M - \varphi_N = \frac{1}{q'}A_{MN} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n}\right),$$

а значит, потенциал произвольной точки, находящейся на расстоянии r от заряда q,

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C, \tag{11}$$

где C — некая произвольная константа, зависящая от выбора нулевой точки. Выбирая её на бесконечности, т. е. полагая $\varphi(\infty) = 0$ [1], получаем $C = 0$, так что

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{11'}$$

Используя принцип суперпозиции, нетрудно получить выражение для потенциала $\varphi(M)$ поля произвольной системы n точечных зарядов

---

[1] Если не оговорено обратное, мы всегда будем считать это условие выполненным.

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}\,, \tag{12}$$

где q_i — i-й заряд, а r_i — расстояние от него до исследуемой точки поля M.

Единицей потенциала в системе СИ является вольт:

$$1\text{В} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{Кл}}.$$

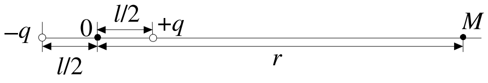

Рис. 9

Пример 1. Найти потенциал диполя на его оси.

Диполем называется пара близко расположенных друг к другу (по сравнению с расстояниями, на которых мы интересуемся их действием) разноименных и одинаковых по величине зарядов $\pm q$ (рис. 9). Обозначив длину диполя через l и отсчитывая расстояние r от его середины, для точки M, находящейся со стороны $+q$, по формуле (12) получим (положив в ней $n = 2$)

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r - l/2} - \frac{q}{r + l/2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r + l/2 - r + l/2}{r^2 - (l/2)^2} \approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

ибо $r >> l$ (по определению диполя). Если точка M расположена со стороны $-q$, то $\varphi(M)$, очевидно, сменит знак.

Из полученного выражения следуют два существенных обстоятельства. Во-первых, потенциал пропорционален произведению заряда диполя на его длину. Это произведение называют электрическим моментом диполя $p = ql$. Во-вторых, потенциал спадает при возрастании r как $1/r^2$. Физически столь быстрый спад потенциала совершенно понятен, ибо поля́ зарядов $+q$ и $-q$ в далёких точках почти полностью компенсируют друг друга. Можно показать, что оба эти утверждения справедливы в общем случае, если удаляться от диполя по любому направлению[1].

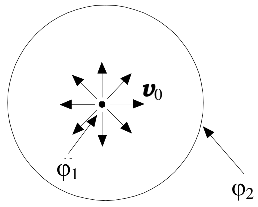

Рис. 10

Пример 2. Раскалённая нить (катод), расположенная по оси проводящего цилиндра (анода), испускает

[1] При этом, конечно, потенциал будет зависеть и от ориентации точки наблюдения относительно оси диполя. Для получения аналитического выражения этого потенциала удобно моменту диполя приписать определённое направление, а именно от $-q$ к $+q$, т. е. считать его вектором.

электроны с некоторыми тепловыми скоростями (рис. 10). С какой скоростью υ_a электрон достигнет анода, если при вылете с катода его скорость была равна υ_0? Потенциалы катода и анода равны соответственно φ_1 и $\varphi_2 > \varphi_1$.

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения механической энергии, ибо на электрон действуют только консервативные силы. Приравнивая полные (т. е. суммы кинетической и электростатической потенциальной) энергии частицы на катоде и аноде, получим[1]

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} - |e|\varphi_1 = \frac{m\upsilon_a^2}{2} - |e|\varphi_2,$$

где m и $-|e|$ — масса и заряд электрона, или

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2|e|}{m}(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Результат не зависит от формы электродов, а определяется лишь разностью их потенциалов. Если бы, например, система электродов была плоская, то (при тех же φ_1, φ_2 и υ_0) скорость на аноде осталась бы той же, хотя характер движения частицы существенно бы изменился.

Контрольные вопросы и задания

1. Что означает найти поле вектора $\boldsymbol{E}$ в какой-либо области пространства?
2. Какие именно проекции поля, созданного бесконечной заряженной плоскостью, равны нулю и почему?
3. Какие проекции этого поля отличны от нуля и как они зависят от расстояния до плоскости?
4. Что такое проводник электричества?
5. Доказать, что заряд, сообщённый проводнику, может располагаться только на его поверхности.
6. Доказать, что электрическое поле снаружи проводника в любой точке его поверхности определяется поверхностной плотностью заряда в данной точке.
7. Почему поле на поверхности проводника не совпадает с полем заряженной плоскости?
8. Какое поле называется потенциальным? Доказать, что произвольное электростатическое поле потенциально.
9. Что называется циркуляцией поля по замкнутому контуру?

[1] В пренебрежении полем тяжести, что обычно делается в подобных расчётах.

10. Доказать, что снаружи на поверхности проводника касательная составляющая поля равна нулю.
11. Дать определение потенциальной энергии точечногозаряда во внешнем поле.
12. Что называется потенциалом электростатического поля? Это вектор или скаляр? Алгебраическая или арифметическая величина?
13. Что называется разностью потенциалов? Почему определение разности потенциалов является более общим, чем определение потенциала?
14. Найти потенциал поля точечного заряда в произвольной точке пространства.
15. То же для произвольной совокупности точечных зарядрв.