Лекция 9

Часть III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Электромагнитные взаимодействия являются самыми распространёнными в природе. Они лежат в основе огромного количества, казалось бы, совершенно не связанных друг с другом явлений, происходящих вокруг нас. Такое распространение электромагнитные силы получили потому, что их носителями служат частицы, из которых состоят атомы и молекулы, образующие все окружающие нас тела. Существование электромагнитных волн и конденсация пара, удар молнии и поведение стрелки компаса, рост дерева и образование живой клетки — за всё это в значительной степени ответственны электромагнитные взаимодействия. Мы начнём знакомство с основами электродинамики — науки, изучающей эти взаимодействия, — с рассмотрения её простейшего раздела — электростатики.

Глава 8. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика изучает взаимодействие неподвижных заряженных объектов. Одним из центральных её понятий является понятие электрического заряда.

§ 8.1. Электрические заряды

Окружающие нас тела могут оказывать влияние друг на друга с помощью сил различной природы. Например, между ними существуют силы гравитационного притяжения, обязанные своим происхождением наличию у тел массы. Известен, однако, ещё один тип сил, проявляющийся в макромасштабах. Оказывается, что если тела подвергнуть определённой предварительной «обработке», то они начинают демонстрировать иные, нежели гравитационные, взаимодействия. «Обработка» эта может быть очень простой: например, достаточно взять твёрдый стержень и потереть им о лоскут ткани или меха. Оба тела становятся носителями нового типа сил и начинают взаимодействовать друг с другом и с другими (подобным же образом «обработанными», или, как говорят, «наэлектризованными») объектами. Причём взаимодействие это оказывается значительно сильнее гравитационного (оно легко наблюдается у тел «обычных» размеров, в то время как для обнаружения гравитационного взаимодействия таких тел нужны специальные точные приборы) и разнообразнее по проявлению: наэлектризованные тела могут не только притягиваться, но и отталкиваться. Обобщение различных экспериментальных данных позволило выявить следующую картину этого взаимодействия, которое назвали электрическим.

Носителем электрических сил является электрический заряд — некое число (скаляр), приписываемое каждому наэлектризованному, или заряженному, объекту по определённым правилам (см. следующий параграф). Существуют заряды двух типов, или знаков: положительные и отрицательные. Одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые притягиваются. Совершенно произвольно заряд, появляющийся на стеклянной палочке, если ей потереть о шёлк, был назван положительным.

Из опыта известны два важнейших свойства заряда: заряд квантуется и заряд (в изолированных системах) сохраняется. Первое означает его дискретность, или существование мельчайшей порции заряда — кванта (или элементарного заряда), причём положительные и отрицательные элементарные заряды оказываются в точности равными друг другу по величине[1]. Таким образом, заряд любого объекта может составлять лишь целое число квантов заряда. Однако ввиду крайней малости кванта заряда его дискретная структура сказывается лишь при исследовании явлений на микроуровне, и мы в нашем рассмотрении, если не оговорено противное, будем считать заряд любого объекта непрерывной величиной.

Второе свойство часто называют законом сохранения заряда: в изолированных системах алгебраическая сумма всех зарядов постоянна. Этот закон не утверждает, что сохраняются порознь заряды каждого знака, он требует постоянства лишь их суммы. Например, в результате ядерной реакции суммарный положительный заряд изолированной системы может увеличиться, однако при этом обязательно на такую же величину возрастёт и её полный отрицательный заряд. Если же в данной области пространства, например, увеличилась алгебраическая сумма зарядов, то это значит, что рассматриваемая область не является изолированной и избыточный заряд откуда-то в неё «притёк».

§ 8.2. Закон Кулона

Закон Кулона — основной закон электростатики — утверждает, что *сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами*[2] *в вакууме* (рис. 1) *прямо пропорциональна произведению зарядов, обратно*

---

[1] Это заряды элементарных частиц — протона и электрона, — входящих в состав окружающих нас тел, численно равные $1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. Известны и более «мелкие» частицы —- так называемые кварки, —- имеющие дробные (но тоже вполне определённые) электрические заряды. Правда, в свободном состоянии кварки не существуют. Впрочем, принципиальным является не величина кванта заряда, а сам факт его существования.

[2] В дальнейшем «зарядами» мы будем называть как сами заряженные тела, так и величины их зарядов.

пропорциональна квадрату расстояния между ними и действует вдоль прямой, соединяющей заряды:

$$\boldsymbol{F}_{12} \sim \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}\,. \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд 2 со стороны заряда 1, q_1 и q_2 — алгебраические величины зарядов, $\boldsymbol{r}_{12}$ — радиус-вектор, направленный от первого заряда ко второму, $\boldsymbol{e}_{12} = \boldsymbol{r}_{12}/r_{12}$ — единичный вектор, коллинеарный $\boldsymbol{r}_{12}$. Под точечными зарядами в этом законе понимаются такие заряженные тела, размеры которых много меньше расстояний между ними. Из (1) следует, что одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые притягиваются (коэффициент пропорциональности здесь положителен). Если в этом законе поменять местами индексы 1 и 2, то получим силу $\boldsymbol{F}_{21}$, с которой второй заряд действует на первый. Очевидно, $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$, т. е. кулоновские силы удовлетворяют III закону Ньютона.

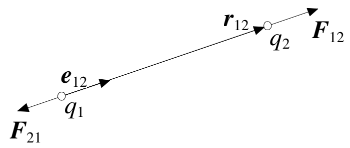

Рис. 1

Зависимость силы взаимодействия от расстояния между зарядами, выражаемая формулой (1), может быть непосредственно проверена на опыте (см., например, школьный учебник физики). Что же касается проверки её пропорциональности величинам зарядов, то здесь дело обстоит несколько сложнее: ведь мы пока не знаем, как количественно определить сам заряд. Однако закон Кулона подсказывает, как это сделать.

Если взять два других заряда и поместить на том же расстоянии, то сила их взаимодействия будет, конечно, другой. Это значит, что она определяется не только расстоянием, но и некоторой характеристикой, отнесённой к данной паре зарядов. Закон Кулона утверждает, что характеристика эта может быть представлена в виде *произведения* двух констант, каждая из которых относится только к *одному* из взаимодействующих зарядов. Это утверждение и составляет содержание закона Кулона в части, касающейся величин зарядов. Для его экспериментальной проверки можно поступить следующим образом.

Возьмём четыре (не меньше!) произвольных точечных заряда и рассмотрим силы их попарного взаимодействия согласно схеме, приведенной на рис. 2. Сначала поместим заряды q_1 и q_3 на некотором расстоянии друг от друга, а остальные заряды устраним. Получим силу их взаимодействия F_{13}. Затем на такое же расстояние сблизим заряды q_2 и q_3 (остальные опять устраним) и измерим силу их взаимо-

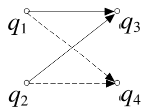

Рис. 2

действия F_{23}. Найдём отношение этих сил F_{13}/F_{23}. Далее проделаем то же самое, беря вместо q_3 заряд q_4. Получим отношение F_{14}/F_{24}. Эти отношения оказываются равными:

$$\frac{F_{13}}{F_{23}} = \frac{F_{14}}{F_{24}}.$$

Таким образом, отношение сил взаимодействия зарядов q_1 и q_2 с *любым* другим (ведь q_3 и q_4 произвольны) не зависит от свойств этого другого заряда, а определяется только характеристиками зарядов q_1 и q_2. Это позволяет приписать каждому точечному заряженному телу[1] некое число (называемое величиной заряда или зарядом данного тела), которому пропорциональна сила взаимодействия этого тела с любым другим:

$$\frac{F_{13}}{F_{23}} = \frac{F_{14}}{F_{24}} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Конечно, приведенные рассуждения определяют величины зарядов тел с точностью до произвольного множителя, зависящего от выбора единицы заряда. Единица же эта может быть выбрана совершенно произвольно и в различных системах единиц оказывается различной. В системе СГС она выбирается так, чтобы множитель пропорциональности в законе Кулона обратился в единицу. В этой системе закон выглядит наиболее просто:

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12}, \qquad (2)$$

а за единицу заряда СГС (она называется ещё абсолютной электростатической единицей и обозначается как единица СГСЭ) принимается заряд, который на равный ему заряд, помещённый на расстоянии 1 см, действует с силой в 1 дину (1 дн = 10^{-5} Н).

В системе СИ заряд измеряют в кулонах (Кл):

$$1 \text{ Кл} = 3\cdot10^9 \text{ ед. СГСЭ}.$$

Поскольку единица заряда в СИ выбирается исходя не из закона Кулона[2], в нём появляется вполне определённый коэффициент пропорциональности, который принято писать в знаменателе:

---

[1] Так же определяется заряд и неточечного объекта: ведь любой объект, в принципе, можно сделать точечным, отнеся остальные заряды от него достаточно далеко.

[2] В системе СИ основной является единица силы тока — ампер, однозначно определяющая единицу заряда.

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}\,. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ ед. СИ — размерный коэффициент[1], называемый электрической постоянной или диэлектрической проницаемостью вакуума, а фактор 4π, также стоящий в знаменателе и несколько усложняющий форму записи закона, есть следствие того, что система СИ является рационализированной: преднамеренное введение этого фактора в закон Кулона упрощает вид многих полученных на его основе соотношений.

§ 8.3. Электрическое поле. Принцип суперпозиции

Разобьем (пока совершенно формально) кулоновскую силу (2) или (3), испытываемую зарядом q_2 со стороны заряда q_1, на два сомножителя: величину заряда q_2 и всё остальное:

$$\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{E}_{12}\, q_2. \tag{4}$$

Это остальное, не зависящее от свойств q_2 и обозначенное в (4) через $\boldsymbol{E}_{12}$, назовем напряженностью электрического поля или просто электрическим полем заряда q_1 в точке 2. Из сравнения (4) и (2) или (3)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{12} &= \frac{q_1}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12} = \frac{q_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}(\text{СГС}),\\ \boldsymbol{E}_{12} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}(\text{СИ}), \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. поле представляет собой некую векторную функцию, определяемую величиной заряда q_1 (который называется источником поля) и радиус-вектором $\boldsymbol{r}_{12}$, проведенным из точки источника 1 в точку «наблюдения» 2.

Исходя из этого разбиения механизм взаимодействия зарядов q_1 и q_2 можно представить следующим образом: заряд q_1 возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле (5), которое и действует на заряд q_2 в соответствии с (4). При таком подходе полю отводится роль агента, посредника, передающего электрические взаимодействия. Заряд q_2 «чувствует» не сам заряд q_1, расположенный где-то в другом месте, а поле q_1, в котором он находится.

Пока мы остаемся в рамках электростатики введение понятия поля вполне правомерно рассматривать как чисто условную процедуру, облег-

[1] В дальнейшем мы увидим, что единица измерения ε_0 связана с единицей электроёмкости фарадом (Ф) и оказывается равной Ф/м.

чающую процесс вычисления силы взаимодействия зарядов. Ровно с таким же правом можно считать, что никакого поля нет, а заряды взаимодействуют непосредственно друг с другом на расстоянии, через пустоту. Ведь в электростатике не существует полей, «оторванных» от зарядов, а потому вопрос о реальности электрического поля не допускает экспериментальной проверки. Однако в рамках электродинамики, изучающей поля движущихся зарядов, такая проверка оказывается возможной[1]. Она вполне определённо указывает, что взаимодействие между зарядами осуществляется именно посредством электромагнитного поля, частным случаем которого является электрическое поле неподвижных зарядов (такое поле называется электростатическим). Итак, мы с самого начала будем считать поле объективной реальностью, неким агентом, обладающим вполне определёнными свойствами, носителем электрических сил.

Рассматривая взаимодействие двух (точечных) зарядов, мы, разумеется, вправе считать любой из них источником поля, а оставшийся — находящимся в этом поле. А что будет «чувствовать» третий заряд q', расположенный поблизости от зарядов q_1 и q_2 в точке O (рис. 3)? Очевидно, он будет испытывать действие «суммарного поля» зарядов q_1 и q_2. А что это такое — «суммарное поле»? Как его найти? Будет ли *одновременное* воздействие зарядов q_1 и q_2 на заряд q' пропорционально его величине? Закон Кулона, относящийся лишь к двум «уединённым» зарядам не может ответить на эти вопросы. Для ответа на них необходимо вновь обратиться к эксперименту.

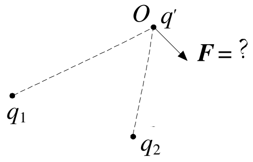

Рис. 3

Оказывается, что *заряды q_1 и q_2 «не мешают» друг другу: их действия на заряд q' порознь лишь «накладываются», т. е. векторно суммируются, не искажаясь*[2]. Этот важнейший опытный факт носит название принципа суперпозиции электрических сил. Отсюда вытекают следующие утверждения.

[1] Принципиально эксперимент по обнаружению электрического поля можно представить себе следующим образом. Мгновенно «уберём» заряд q_1. Если заряд q_2 «заметит» это в тот же самый момент, то имеет место дальнодействие (действие на расстоянии, через пустоту) и поля как физического объекта нет. Если же он ещё некоторое время будет испытывать кулоновскую силу (3) (хотя заряда q_1 в точке 1 уже нет), то реализуется близкодействие и понятие поля приобретает глубокий физический смысл.

[2] Природа могла бы быть устроена сложнее. Например, добавление к системе q_1, q' заряда q_2 могло бы приводить не только к появлению новой силы со стороны заряда q_2, но и к искажению ранее действовавшей кулоновской силы со стороны q_1. Следует отметить, впрочем, что в настоящее время известны эффекты, связанные с рождением в вакууме элементарных частиц в сверхсильных полях, могущие трактоваться как нарушения принципа суперпозиции. Мы, однако, подобные явления сразу исключим из рассмотрения.

1. Сила одновременного действия q_1 и q_2 на q' пропорциональна величине q' (ибо ей пропорциональны силы F_1 и F_2 воздействия на q' порознь зарядов q_1 и q_2). Это обстоятельство позволяет обобщить определение поля (4) точечного заряда на случай двух (и, очевидно, большего количества) зарядов. Представляя силу, действующую на «пробный» заряд q' со стороны произвольной конфигурации точечных зарядов, в виде

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}q', \qquad (4')$$

определим электрическое поле $\boldsymbol{E}$, создаваемое данной системой зарядов в какой-либо точке пространства, как отношение силы, испытываемой в этой точке пробным зарядом, к его величине:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q'}. \qquad (6)$$

Поскольку любой заряд можно представить в виде совокупности точечных, это определение поля является вполне общим.

2. *Электрическое поле* двух (и большего количества*) зарядов в любой точке пространства равно геометрической сумме полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности* (т. е. когда остальные заряды устранены, рис. 4). Это утверждение называется принципом суперпозиции полей. Поскольку поле каждого заряда определяется в соответствии с законом Кулона выражениями (5), поле произвольной системы точечных зарядов

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(x,y,z) &= \frac{q_1}{r_1^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \frac{q_n}{r_n^2}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\boldsymbol{e}_i \ (\text{СГС}),\\
\boldsymbol{E}(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\boldsymbol{e}_i \ (\text{СИ}),
\end{aligned} \qquad (7)$$

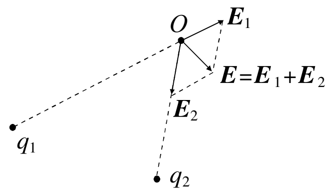

Рис. 4

где x, y, z — координаты точки наблюдения, q_i — величина i-го заряда (источника), $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, проведённый из точки i-го заряда в точку наблюдения, $\boldsymbol{e}_i$ — единичный вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{r}_i$.

Выражения (7) вместе с определением поля (4′) или (6), являющиеся следствиями закона Кулона и принципа суперпозиции, позволяют рассчитать силы взаимодействия между любыми зарядами, образующими произвольную конфигурацию в пространстве.

Замечание 1. При экспериментальном исследовании электрического поля, конечно, не обязательно, да часто и невозможно, помещать в данную точку единичный заряд. Для этих целей используют более удобный так называемый «пробный» заряд, измеряют силу, действующую на него, и делят её на величину заряда. К пробному заряду предъявляются определённые требования. Он должен быть достаточно малым по размерам (чтобы на его протяжении исследуемое поле существенно не менялось) и величине (чтобы источники поля под действием этого заряда заметно не смещались со своих мест). Если второе условие не выполнить, то поля, созданные внешними источниками до и после внесения пробного заряда, могут значительно различаться.

Замечание 2. Принцип суперпозиции позволяет рассчитать силу взаимодействия точечных зарядов в произвольной среде. Ведь роль среды сводится к наложению электрических полей её атомов и молекул на исходные поля рассматриваемых зарядов. Только в *простейших* случаях особой симметрии поля или когда непроводящая однородная среда заполняет *всё* пространство, занятое полем, её присутствие (как показывают соответствующие расчёты) приводит к уменьшению поля по величине (но не по направлению) в каждой точке среды в некоторое число раз ε. В общем же случае её влияние оказывается заметно сложнее и необходимо пользоваться только законом Кулона в вакууме, учитывая влияние зарядов среды с помощью принципа суперпозиции.

Замечание 3. Закон Кулона и принцип суперпозиции являются фундаментом, основой всей электростатики. Все остальные её законы могут быть получены как следствия этих общих положений. Однако многие из них представляют значительный самостоятельный интерес, а некоторые соотношения, объединённые в систему, оказываются полностью эквивалентными этим исходным принципам. К выводу одного из таких уравнений мы сейчас и перейдём.

§ 8.4. Теорема Гаусса

1. **Телесный угол.** Рассмотрим пучок лучей, проведенных из произвольной точки O и проходящих через всё точки некоторой замкнутой кривой Γ (рис. 5). Часть пространства, ограниченная этими прямыми (образующими коническую поверхность), называется телесным углом, а точка O — его вершиной.

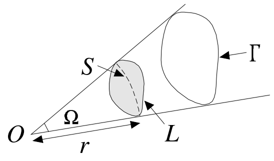

Рис. 5

Если построить сферу радиусом r с центром в точке O, то коническая поверхность пересечется с ней вдоль некоторой другой замкнутой кривой L, ограничивающей участок сферы площадью S (рис. 5). Очевидно, что площадь эта пропорциональна r^2, а потому отношение

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

не будет зависеть от радиуса. Оно называется величиной телесного угла (мы для краткости будем называть часто телесным углом и сам угол, и его величину). Очевидно, полный телесный угол равен 4π.

2. **Поток вектора через поверхность**. Чтобы говорить о потоке через поверхность, находящуюся в поле какого-либо вектора, её предварительно нужно «ориентировать». Это значит, что совершенно произвольно (если поверхность незамкнута) мы выбираем какую-нибудь из её сторон и называем внешней (если поверхность замкнута, то её внешняя сторона определяется, очевидно, однозначно; если поверхность нельзя ориентировать, как, например, лист Мёбиуса, то к ней понятие потока вообще неприменимо). Нормаль, восставленная из любой точки поверхности с её внешней стороны, называется внешней или положительной.

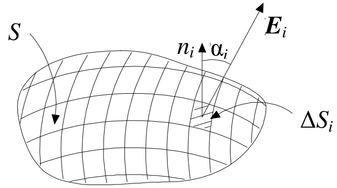

Рис. 6

Рассмотрим произвольную ориентированную поверхность S, находящуюся в электрическом поле[1] (рис. 6). Разобьем её на множество маленьких участков, каждый из которых можно с достаточной точностью считать плоским, а поле $\boldsymbol{E}$ в пределах каждого их них — постоянным по величине и направлению. *Потоком вектора* $\boldsymbol{E}$ *через i-й участок* называется величина

$$\Delta N_i = E_{ni}\Delta S_i = E_i \Delta S_i \cos\alpha_i = (\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{n}_i)\Delta S_i, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{E}_i$ — вектор напряжённости поля на i-м участке (E_{ni} — его нормальная проекция), ΔS_i — площадь участка, $\boldsymbol{n}_i$ — единичная положительная нормаль ($|\,\boldsymbol{n}_i\,| = 1$), α_i — угол между векторами $\boldsymbol{E}_i$ и $\boldsymbol{n}_i$. *Потоком вектора* $\boldsymbol{E}$ *через поверхность S называется сумма его потоков через все m малых её участков*:

$$N = \sum_{i=1}^{m} \Delta N_i = \sum_{i=1}^{m} E_{ni}\Delta S_i = \sum_{i=1}^{m} E_i \Delta S_i \cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{n}_i)\Delta S_i. \qquad (9)$$

[1] Понятие потока вектора через поверхность применимо, разумеется, по отношению к любому векторному полю.

Поток — скалярная алгебраическая величина, знак которой определяется произвольным выбором положительной нормали. Если, ничего не меняя, внешнюю сторону незамкнутой поверхности переименовать и назвать внутренней, то поток тоже сменит знак.

Можно выражение для потока (9) представить в несколько иной форме. Для этого введем понятие средней нормальной проекции E_{ncp} вектора $\boldsymbol{E}$ на данной поверхности S. Определим E_{ncp} как

$$E_{ncp} = \frac{E_{n1}\Delta S_1 + E_{n2}\Delta S_2 + \ldots + E_{nm}\Delta S_m}{S} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{m} E_{ni}\Delta S_i\,, \qquad (10)$$

где S — площадь поверхности, а остальные обозначения те же, что и в (8) и (9). Если поверхность S разбита на m участков равной площади ΔS, то $S = m\Delta S$ и (10) есть просто среднее арифметическое E_n по всем участкам:

$$E_{ncp} = \frac{(E_{n1} + E_{n2} + \ldots + E_{nm})\Delta S}{m\Delta S} = \frac{E_{n1} + E_{n2} + \ldots + E_{nm}}{m}\,.$$

Нетрудно видеть, что числитель в (10) — не что иное как поток вектора $\boldsymbol{E}$ через поверхность S, т. е.

$$E_{ncp} = \frac{N}{S}\,,$$

откуда

$$N = E_{ncp}S, \qquad (11)$$

т. е. поток — это средняя нормальная проекция поля $\boldsymbol{E}$ на данной поверхности, умноженная на её площадь.

3**. Теорема Гаусса.** Вычислим поток вектора $\boldsymbol{E}$, создаваемого точечным зарядом q, сквозь маленькую (ориентированную) площадку ΔS, размеры которой много меньше расстояния r до заряда (рис. 7) и которая видна из точки O, занимаемой зарядом, под телесным углом $\Delta\Omega$ (в системе СИ):

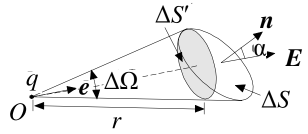

Рис. 7

$$\Delta N = (\boldsymbol{E},\boldsymbol{n})\Delta S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})\Delta S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,\Delta S.$$

Произведение $\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,\Delta S$ численно равно площади $\Delta S'$ проекции площадки ΔS на поверхность сферы радиусом r с центром в O. Если угол $(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})$ острый (т. е. из O видна внутренняя сторона ΔS), то

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,\Delta S = +\Delta S',$$

если же угол $(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})$ тупой (из O видна внешняя сторона ΔS), то

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,\Delta S = -\Delta S'.$$

Но $\dfrac{\Delta S'}{r^2} = \Delta\Omega$, и выражение для потока принимает вид

$$\Delta N = \pm\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega\,. \qquad (12)$$

Таким образом, поток вектора $\boldsymbol{E}$ поля точечного заряда через маленькую площадку зависит, помимо величины заряда, только от того телесного угла, под которым видна эта площадка из точки источника. Знак в (12) определяется (произвольным) выбором внешней стороны площадки.

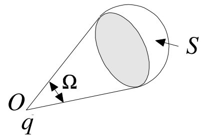

Рис. 8

Если поверхность, находящаяся в поле точечного заряда, имеет конечные размеры (рис. 8), то для расчёта потока необходимо, очевидно, разбить её на малые участки и сложить выражения типа (12), написанные для каждого из них:

$$N = \sum_i \Delta N_i = \pm\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \Delta\Omega_i = \pm\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega\,, \qquad (13)$$

где Ω — телесный угол, под которым видна вся поверхность S из точки O.

Наибольший интерес представляет ситуация, когда поверхность S замкнута. При этом произвол в выборе её внешней стороны исчезает и выражение (13) для потока становится однозначным. Если заряд расположен внутри поверхности (рис. 9), то она окружает его со всех сторон и, стало быть, её внутренняя часть видна из точки-заряда под полным телесным углом 4π[1]. Следовательно, в этом случае

$$N = \frac{q}{\varepsilon_0}\,. \qquad (14)$$

Если заряд находится вне поверхности (рис. 10), то из него можно

[1] Нетрудно показать, что для сильно извилистых поверхностей, имеющих участки, которые луч из источника пересекает несколько (обязательно нечётное число!) раз, получается такой же результат.

провести пучок лучей, касающихся поверхности вдоль некоторой кривой L. Эта кривая разделит S на две части, каждая из которых видна из точки источника под одним и тем же телесным углом Ω, но одна из них S_1 обращена к нему своей внутренней стороной, а другая S_2 — внешней. Потоки через эти части оказываются одинаковыми по величине, но противоположными по знаку, а потому поток через замкнутую поверхность S обращается в нуль.

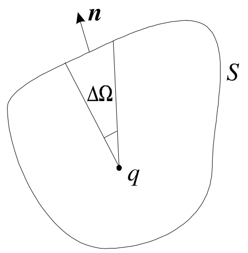

Рис. 9

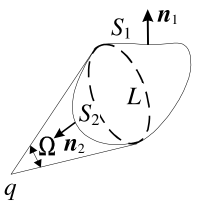

Рис. 10

Обе рассмотренные ситуации[1] могут быть охвачены одной формулой (14), если только под q понимать в ней заряд, находящийся внутри поверхности.

Наконец, можно обобщить эту формулу и на случай произвольного числа m точечных зарядов, часть из которых находится внутри, а часть — вне замкнутой поверхности. По принципу суперпозиции в любой точке поверхности

$$E_n = E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \ldots + E_n^{(m)},$$

где $E_n^{(j)}$ — нормальная проекция поля j-го заряда (даваемая законом Кулона). Тогда

$$N = \sum_i E_{ni}\Delta S_i = \sum_i (E_{ni}^{(1)} + E_{ni}^{(2)} + \ldots + E_{ni}^{(m)})\Delta S_i =$$

$$= \sum_i E_{ni}^{(1)}\Delta S_i + \sum_i E_{ni}^{(2)}\Delta S_i + \ldots + \sum_i E_{ni}^{(m)}\Delta S_i = N_1 + N_2 + \ldots + N_m,$$

т. е. поток суммы зарядов равен сумме потоков каждого заряда в отдельности (когда остальные устранены). Таким образом, заряды снаружи поверхности вклада в поток не дадут, а находящиеся внутри дадут вклад, пропорциональный их алгебраической сумме:

$$N = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_j q_j . \qquad (15)$$

[1] Случай, когда точечный заряд расположен на поверхности, физического смысла не имеет (по определению, точечный заряд - это такой, поле которого можно рассматривать лишь на некотором расстоянии от него) и должен быть исключён из рассмотрения.

Это соотношение выражает собой фундаментальную теорему Гаусса: *поток электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен делённой на ε_0 алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности.* Как бы ни менялись форма и площадь поверхности S, как бы ни перемещались заряды внутри S и вне неё, но если их число внутри остается постоянным, оказывается неизменным и поток через неё.

Замечание. Как явствует из приведенного вывода теоремы Гаусса, она является следствием точной двойки в показателе степени при r в законе Кулона. Именно потому, что $E \sim \frac{1}{r^2}$, поток через маленькую площадку определяется (помимо величины заряда) только телесным углом, под которым она видна из точки источника. Действительно, площадь ΔS поверхности, на которую «опирается» данный телесный угол, растёт $\sim r^2$, а поле падает $\sim \frac{1}{r^2}$ так что поток, пропорциональный $E\Delta S$, от r не зависит. Если бы поле спадало с расстоянием, например, быстрее (скажем, $\sim \frac{1}{r^3}$), то произведение ES уже зависело бы от r (в данном примере уменьшалось бы $\sim \frac{1}{r}$) и теорема Гаусса не выполнялась бы.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется электрическим зарядом? Как определить (по величине и знаку) заряд произвольного заряженного объекта?
2. Какие два основных свойства заряда известны из эксперимента? Что означает каждое из них?
3. Сформулировать закон Кулона. Чему равна единица заряда в СИ?
4. Что такое электрическое поле точечного заряда? Можно ли, в принципе, экспериментально доказать его существование? Если нельзя, то почему, если можно, то как именно?
5. Что такое электрическое поле произвольной совокупности зарядов? Почему сила одновременного действия нескольких зарядов на данный пропорциональна его величине?
6. Сформулировать принцип суперпозиции электрических полей.
7. Что такое пробный заряд? Каким требованиям он должен удовлетворять?
8. Как рассчитать электрическое поле, возбуждаемое точечным зарядом в произвольной среде?
9. Что называется потоком вектора через поверхность? Это вектор или скаляр? Алгебраическая или арифметическая (т. е. всегда по-

ложительная) величина?

10. Доказать теорему Гаусса.
11. Какой поток стоит в левой части теоремы Гаусса — созданный всеми зарядами или только находящимися внутри поверхности?
12. Выполнялась бы теорема Гаусса, если бы поле точечного заряда спадало с расстоянием медленнее, чем $1/r^2$? Почему?