

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА**

Специализированный Учебно-Научный Центр
Школа им. А.Н.Колмогорова

Серия Физика

С.П.Крюков

**Курс лекций по общей
физике**

Часть III

**Электричество и магнетизм
Раздел 2**

Издательство СУНЦ МГУ
2005

ББК 22.13
К 78
УДК 53(075)

Рецензенты:

доктор физ.-мат наук В.И.Лобышев
доктор физ.-мат наук В.А.Давыдов

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Крюков С.П.

Курс лекций по общей физике. Ч. III. Разд. 2. М., Изд-во СУЦ МГУ,
2005. - 68 стр.
ISBN 5-211-03673-5

Данный курс является пособием для учащихся 9-11 классов спецшкол с углублённым изучением физики. В основу его положены лекции, читавшиеся автором в течение ряда лет старшеклассникам СУНЦ МГУ. По уровню изложения материала пособие занимает промежуточное положение между школьным и вузовским учебниками физики, приближаясь скорее к уровню последнего. Ради краткости изложения в него практически не включён описательный, иллюстративный материал, содержащийся, например, в школьном учебнике. Разделы курса тесно связаны между собой и представляют собой неразрывное целое.

Во второй раздел III части пособия вошли темы: постоянный ток, магнитостатика и электромагнитная индукция. В данном разделе курса (как и во всех предшествующих) не предполагается знакомства читателя с интегральным исчислением, однако это практически не наносит ущерба изложению материала. В лекциях широко используются понятия циркуляции и потока вектора, записанные в виде интегральных сумм, которые, как показывает практика, легко усваиваются учащимися.

Лекция 14**Глава 9. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК****§ 9.1. Электрическое поле постоянного тока**

Согласно данному нами определению проводники электричества – это тела, обладающие достаточным количеством свободных зарядов. Под действием сколь угодно малого поля эти заряды приходят в движение, которое продолжается до тех пор, пока поле в каждой точке внутри проводника не обратится в нуль и его поверхность (и объем) не станет эквипотенциальной. Если, например, два проводника, заряженные противоположными зарядами, соединить третьим, т. е. образовать единый проводник, то

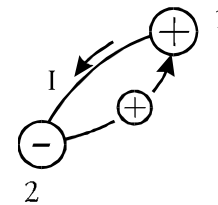


Рис. 1.

«плюсы» и «минусы» сорвутся со своих мест и под действием сил кулоновского притяжения устремятся навстречу друг другу (рис. 1). При этом в проводнике возникнет электрический ток и некоторое время в нем будет существовать электрическое поле, поддерживающее этот ток. Поле это (а вместе с ним и ток), если не принимать специальных мер, будет быстро падать со временем.

Предположим, однако, что в нашей системе существует механизм, в точности восполняющий утечку зарядов с проводников 1 и 2. Для этого он должен непрерывно переносить все «плюсы», прибывающие на проводник 2, назад на проводник 1, двигая их против сил электрического поля¹. Безразлично, как устроен этот механизм. Это может быть аккумулятор, где действуют химические силы, генератор, в котором работают силы электромагнитной индукции, или же просто электрофорная машина, где разделение зарядов осуществляется за счет усилия человеческой руки. Тогда картина движения зарядов (т. е. электрический ток) окажется стационарной, не меняющейся со временем. Очевидно, стационарным окажется и электрическое поле, поддерживающее этот ток в проводнике, соединяющем наши накопители зарядов 1 и 2². Отсюда сле-

¹ Очевидно, приводимые рассуждения не зависят от знака свободных носителей заряда. Если ими являются отрицательные частицы, то нужно все направления движения зарядов на рис. 1 заменить на обратные.

² Поскольку скорость движения свободных зарядов в проводниках, как показывает опыт, под действием электрического поля не возрастает до «бесконечности», мы обязаны предположить, что в них имеются некие силы, тормозящие это движение. Поэтому между интенсивностью движения зарядов и электрическим полем должна быть какая-то связь.

дует, что распределение зарядов, создающих это поле, тоже должно быть стационарным, т. е. объемная плотность заряда $\rho(M)$ в каждой точке проводника, несущего стационарный, или постоянный, ток, от времени не зависит. Если бы $\rho(M)$ менялось со временем в какой-нибудь области, то существующее поле тоже изменялось бы и создаваемый им ток не был бы постоянным. Математически это условие может быть записано в следующем виде:

$$\rho'_t(M) = 0, \quad (1)$$

где $\rho'_t(M)$ – производная от объемной плотности ρ в точке M по времени.

Таким образом, электрическое поле постоянного тока тождественно полю точно так же распределенных неподвижных зарядов, т. е. является полем электростатическим. То обстоятельство, что в каждой точке пространства, заполненного током, одни элементы заряда сменяются другими, сохраняя $\rho(t) = const$, не может сказаться на возбуждаемом этими зарядами поле³. Отсюда следует, что:

- а) электрическое поле постоянных токов потенциально;
- б) для него справедлива теорема Гаусса.

Итак, внутри проводника, по которому течет постоянный ток, существует электрическое поле, причем поле это потенциально. Объем и поверхность проводника, естественно, эквипотенциальными уже не являются, и между различными его сечениями может существовать разность потенциалов. В этой лекции мы будем исследовать токи, текущие под действием только электрических сил.

§ 9.2. Законы Ома и Джоуля

Рассмотрим какой-либо участок протяженного проводника, ограниченный двумя его сечениями-эквипотенциалами (рис. 2), находящимися

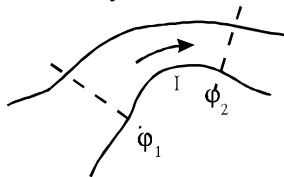


Рис. 2.

под разными потенциалами. Силой тока I , проходящего через заданное сечение проводника (или просто током), называется заряд, пересекающий это сечение в единицу времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (2)$$

где Δq – заряд, перетекший за время Δt с одной стороны сечения на другую. Пока мы будем понимать под током положительную величину и вне зависимости от знака носителей считать его направленным в ту сторону,

³ Строго говоря, мы должны постулировать это утверждение.

куда двигались бы положительные частицы, осуществляющие наблюдаемый перенос заряда. Другими словами, мы считаем ток текущим от большего потенциала к меньшему.

Основной закон постоянного тока – закон Ома, являющийся обобщением данных опыта, гласит: сила тока I , текущего по проводнику⁴, пропорциональна разности потенциалов между его концами:

$$I = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3)$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы первого и второго его сечения, если идти по направлению тока ($\varphi_1 > \varphi_2$), а коэффициент пропорциональности R , который и здесь принято писать в знаменателе, называется сопротивлением проводника. Коэффициент этот зависит от размеров и формы проводника, а также от его материала⁵.

Единицей тока в системе СИ служит ампер:

$$1 \text{ A} = 1 \text{ Кл/с},$$

а единицей сопротивления, которая определяется из закона Ома, – Ом:

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А},$$

т. е. 1 Ом – это сопротивление такого проводника, в котором возникает ток 1 А, если к его концам приложить разность потенциалов 1 В.

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя произвольными точками поля, как это уже отмечалось, часто называют напряжением, действующим между этими точками, и обозначают буквой U . С учетом этого закон Ома (3) может быть записан также в виде

$$U = IR.$$

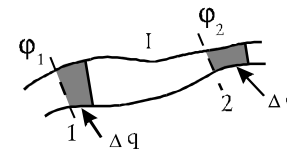


Рис. 3.

Обратимся теперь к энергетическим превращениям, происходящим внутри проводника, несущего постоянный ток. Пусть потенциалы концов какого-либо выделенного его участка равны φ_1 и φ_2 (рис. 3) и за время Δt через сечение 1 внутрь этого участка вошел заряд $\Delta q = I\Delta t$. Так как ток постоянный, то в соответствии с условием (1) суммарный заряд рассматриваемого отрезка проводника измениться не может и через другое

⁴ Очевидно, что через любое сечение проводника протекает один и тот же ток (если этот проводник не имеет разветвлений), иначе в определенных его участках происходило бы накопление заряда, электрическое поле менялось бы и ток не был бы постоянным.

⁵ Он может зависеть также от внешних условий, в частности, от температуры.

его сечение 2 должен выйти такой же заряд Δq . Поскольку, кроме того, все электрические характеристики участка со временем не меняются, весь процесс сводится к переносу заряда Δq от сечения 1 с потенциалом φ_1 к сечению 2 с потенциалом φ_2 . При этом электрические силы совершат, очевидно, работу

$$A' = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = UI\Delta t,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение между сечениями 1 и 2. Если другие силы над рассматриваемым участком работы не совершают и его механическая энергия не меняется, т. е., как правило, если он неподвижен и в нем не происходит химических реакций, то по первому началу термодинамики

$$A' = \Delta W + Q_{om},$$

где ΔW – увеличение внутренней энергии проводника, приводящее к повышению его температуры T , а Q_{om} – теплота, отданная окружающей среде. В установившемся режиме, когда $T = const$, $\Delta W = 0$ и вся эта работа целиком выделяется в виде тепла. Это тепло называется джоулевым и может быть представлено с учетом закона Ома следующими выражениями:

$$Q_{om} = UI\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t = I^2 R\Delta t, \quad (4)$$

где R – сопротивление участка. Соотношения (4) представляют собой закон Джоуля для участка цепи.

Хотя в рамках нашего рассмотрения все эти выражения эквивалентны друг другу, область применимости последнего равенства оказывается гораздо шире областей применимости остальных. В следующей лекции мы увидим, что в случае действия на выбранном участке сил неэлектростатического происхождения эквивалентность этих соотношений нарушается и именно последнее из них определяет выделяющееся джоулево тепло. Поэтому мы сразу под джоулевым теплом $Q_{дж}$ будем понимать выражение

$$Q_{дж} = I^2 R\Delta t, \quad (5)$$

справедливое в самом общем случае действия внутри проводника сил любой природы.

Разделив (5) на Δt , мы получим так называемую мощность джоулевых потерь

$$P_{дж} = \frac{Q_{дж}}{\Delta t} = I^2 R, \quad (6)$$

представляющую собой теплоту, выделяющуюся в единицу времени на данном участке с сопротивлением R при прохождении по нему тока I .

Прежде чем переходить к обсуждению введенной нами новой характеристики проводника – его сопротивления, рассмотрим еще несколько новых понятий.

Плотностью тока j называется заряд, протекающий в единицу времени через единицу перпендикулярного к направлению его движения сечения проводника. В общем случае произвольного проводника j может меняться от точки к точке, а потому по определению

$$j = \lim_{\Delta S_{\perp} \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}}, \quad (7)$$

где ΔS_{\perp} – площадь перпендикулярной площадки, а ΔI – ток через нее. Мы наделим плотность тока свойствами вектора, т. е. помимо величины, даваемой (7), припишем ему определенное направление в пространстве. Это направление мы выберем совпадающим с направлением движения свободных носителей⁶, если они положительны, и противоположно ему в случае отрицательного их знака. При таком определении j ток через малую произвольно ориентированную площадку ΔS (рис. 4)

$$\Delta I = j \Delta S_{\perp} = j_n \Delta S = (\mathbf{j}, \mathbf{n}) \Delta S, \quad (8)$$

где j_n – проекция вектора j на нормаль к площадке ΔS , а ΔS_{\perp} – проекция площадки ΔS (на рис. не показана) на перпендикулярную к j плоскость. Тангенциальная составляющая $j_{\tau} \tau$ вкладывает в ток не дает, ибо характеризу-

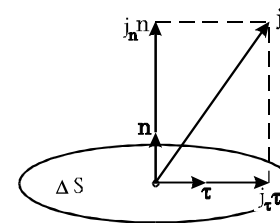


Рис. 4.

ет движение зарядов *вдоль* площадки ΔS , а не *через* нее.

Правая часть выражения (8) в зависимости от взаимной ориентации векторов j и n может принимать и отрицательные значения, и для того, чтобы оно было справедливым всегда, мы должны расширить данное нами ранее определение силы тока. В соответствии с этим, под силой тока, или током, через данную ориентированную поверхность мы будем понимать теперь алгебраическую скалярную величину, численно равную заряду, прошедшему через эту поверхность в направле-

⁶ Речь идет, конечно, об усредненном по большому числу этих носителей направлении их движения. При таком усреднении тепловые скорости частиц, взаимно уничтожаясь, вкладывают в это направление не дадут и оно целиком будет определяться лишь средней, «дрейфовой», скоростью их упорядоченного движения как целого.

нии ее положительной нормали в единицу времени. Нетрудно видеть, что при таком определении ток через произвольную ориентированную поверхность равен потоку вектора \mathbf{j} через нее. Действительно, разбивая эту поверхность на малые площадки ΔS_i и считая по формуле (8) токи ΔI_i через каждую из них, мы после суммирования этих выражений по всем элементам поверхности получим

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta I_i = \sum_{i=1}^n j_{ni} \Delta S_i, \quad (9)$$

где левая часть этого равенства $I = \sum_{i=1}^n \Delta I_i$ представляет собой, очевидно,

полный ток через поверхность, а правая – поток вектора \mathbf{j} через нее.

Назовем линией тока направленную кривую, касательная к которой в каждой ее точке совпадает по направлению с вектором \mathbf{j} . Очевидно, линия тока представляет собой траекторию движения бесконечно малого (но все же содержащего достаточное для усреднения число частиц) элемента заряда. Условимся проводить линии \mathbf{j} с таким расчетом, чтобы их *густота была пропорциональна величине \mathbf{j} в данной области*.

Если через все точки какой-либо замкнутой кривой, лежащей внутри несущего ток проводника, провести линии тока, то мы получим так называемую трубку тока (рис.5), боковая поверхность которой состоит из этих линий. Понятно, что через боковую поверхность трубки тока заряд не переносится (ибо на этой поверхности $j_n = 0$), а потому ток через любое ее сечение оказывается одним и тем же.

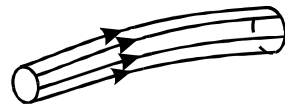


Рис.5

§ 9.3 Сопротивление однородного цилиндрического проводника

Каким же образом коэффициент пропорциональности в законе Ома – сопротивление проводника – зависит от его параметров? Попытаемся выделить в этой зависимости части, определяемые отдельно геометрией данного образца проводника и его *материалом*. Начнем с простейшего случая.

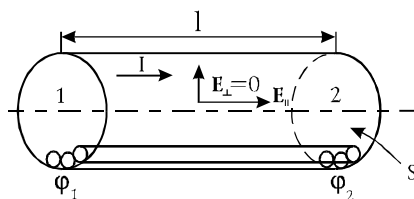


Рис. 6

Рассмотрим однородный цилиндрический проводник, по которому течет постоянный ток I

(рис. 6). Пусть на перпендикулярных его оси сечениях 1 и 2, находящихся на расстоянии l друг от друга, поддерживаются потенциалы φ_1 и φ_2 . Какое поле будет при этом действовать внутри проводника? Как распределится ток по его сечению?

Ввиду однородности проводника и тождественности физических условий вдоль его оси любые перпендикулярные ей сечения абсолютно эквивалентны. Отсюда следует равенство нулю поперечной составляющей (ввиду аксиальной симметрии задачи она может быть только радиальной) поля \mathbf{E}_\perp , ибо если она существует в каком-то одном сечении, то она существует и во всех остальных. Эта составляющая повлечет за собой появление поперечного тока, который, дойдя до поверхности, должен оборваться, приводя к накоплению у поверхности заряда и нарушая, таким образом, условие постоянства тока I . Но если поле имеет лишь одну продольную составляющую, то оно обязано быть однородным не только по длине (что следует из эквивалентности сечений), но и по сечению (это вытекает из его потенциальности – см. § 8.14, пример 1). Таким образом, все линии тока оказываются параллельными оси, а трубки тока идентичны по сечению. Значит, вектор \mathbf{j} постоянен по сечению проводника, а полный ток, текущий по нему,

$$I \sim S. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что, кроме того,

$$I \sim \frac{1}{l}. \quad (11)$$

Действительно, «надставим» отрезок нашего проводника точно таким же куском с той же разностью потенциалов на концах. Получим проводник длиной $2l$ с током I и напряжением $2U = 2(\varphi_1 - \varphi_2)$. Уменьшим теперь напряжение на его концах до U . По закону Ома ток тоже уменьшится вдвое. Получаем, что при увеличении длины проводника в два раза и неизменном напряжении на его концах ток через него падает вдвое, т. е. зависимость (11).

Комбинируя (10) и (11), нетрудно видеть, что закон Ома может быть записан в следующем виде:

$$I = \lambda \frac{S}{l} U = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} U, \quad (12)$$

⁷ При установлении тока такие процессы возможны, однако поперечный ток будет длиться до тех пор, пока накапливающийся на поверхности заряд, создавая собственное поле, не обратит в нуль поперечное поле в любой точке проводника (как в электростатике!).

где λ и ρ называются соответственно удельными проводимостью и сопротивлением проводника и являются константами, зависящими от свойств его материала⁸. Из сравнения (12) и (3) получаем формулу для расчета сопротивления однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (13)$$

Отсюда может быть получена единица ρ в системе СИ – Ом·м; единица λ , очевидно, есть обратная величина.

§ 9.4. Сопротивление проводника произвольной формы

В случае проводника произвольной формы, сечения 1 и 2 которого находятся под напряжением $U = \phi_1 - \phi_2$ (рис. 7), текущий по нему ток I (мы

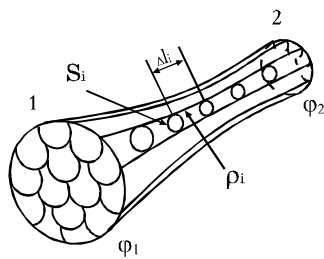


Рис. 7.

рассматриваем участок, не имеющий ответвлений) практически всегда может быть представлен в виде большого числа k достаточно тонких трубок тока.

Можно показать⁹, что *распределение* токов в объеме проводника не изменится при варьировании напряжения между его концами. Другими словами, плотность тока \mathbf{j} в каждой точке, оставаясь неизменной по направлению, по величине меняется пропорционально приложенному напряжению.

Таким образом, выделенные трубки тока при изменении напряжения не деформируются и можно применять закон Ома к каждой из них. Тогда для m -й трубки

$$\Delta I_m = \frac{1}{R_m} U,$$

где ΔI_m – ток, текущий в m -й трубке, а R_m – ее сопротивление. Складывая подобные выражения для всех k трубок, получим

⁸ См. сноску⁵ на стр. 5.

⁹ Доказательство основывается на линейности полной системы уравнений электростатики (7л11) и теореме единственности (см. сноску⁵⁰ на стр. 62).

$$I = \sum_{m=1}^k \frac{1}{R_m} U,$$

откуда определится сопротивление R участка 1 – 2:

$$\frac{1}{R} = \sum_{m=1}^k \frac{1}{R_m}. \quad (14)$$

Разобьем далее каждую трубку тока на n участков, любой из которых с достаточной точностью можно считать цилиндрическим и однородным, и применим к ним формулу (13). Суммируя напряжения U_i на всех таких участках m -й трубки и приравнявая сумму полному напряжению U , действующему между ее концами, получим

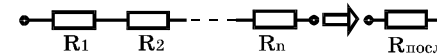
$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \Delta l_m R_i = \Delta l_m \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\Delta l_i}{S_i},$$

где Δl_m – ток, текущий по m -й трубке, а $\Delta l_i, S_i, \rho_i$ – соответственно длина, сечение и удельное сопротивление i -го ее участка. Отсюда полное сопротивление рассматриваемой трубки тока

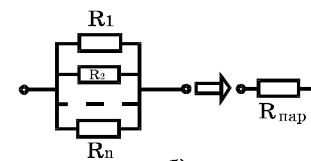
$$R_m = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\Delta l_i}{S_i} \quad (15)$$

(наше рассмотрение оказалось настолько общим, что допускает изменение проводимости среды от точки к точке).

Итак, для расчета сопротивления проводника произвольной формы нужно разбить его на тонкие трубки тока, найти по (15) сопротивление



а)



б)

Рис. 8

каждой из них, а затем, используя (14), вычислить сопротивление всего участка проводника.

Замечание. Полученные формулы (15) и (14), очевидно, дают величины эквивалентных сопротивлений систем последовательно $R_{\text{послед}}$ и параллельно $R_{\text{пар}}$ соединенных проводников, изображенных на рис. 8 а и б:

$$R_{\text{носл}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (15')$$

$$\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (14')$$

Следует отметить, что существуют более сложные схемы соединения сопротивлений, не сводящиеся к рассмотренным, на которых, однако, мы останавливаться не будем.

§ 9.5. Закон Ома в дифференциальной форме

Преобразуем закон Ома (3) к такой форме, которая была бы удобна для описания токов в произвольной среде. Для этого рассмотрим какую-либо трубку и применим закон Ома к малому ее участку длиной Δl (рис. 9):

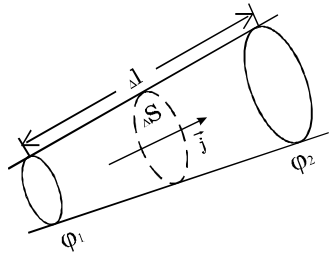


Рис. 9.

$$j\Delta S = \lambda \frac{\Delta S}{\Delta l} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где j – плотность тока на этом участке, а λ – его удельная проводимость. Или, по сокращении на ΔS ,

$$j = \lambda \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l} = -\lambda \frac{\Delta \varphi}{\Delta l},$$

где $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – изменение потенциала в направлении j . Но скорость спада потенциала $-\frac{\Delta \varphi}{\Delta l}$ вдоль какого-либо направления равна проекции вектора поля \mathbf{E} на это направление:

$$-\frac{\Delta \varphi}{\Delta l} = E_l = E,$$

ибо поперечных составляющих поля нет. Таким образом,

$$j = \lambda E, \quad (16)$$

где j , λ и E – средние значения соответствующих величин внутри рассматриваемого объема трубки тока. Чем меньше этот объем, тем ближе они подходят к значениям в определенной точке проводящей среды. В пределе, при стягивании объема в точку, (16) переходит в локальное равенство, относящееся к этой точке. Если учесть, что величины j и E суть векторы,

причем, как следует из приведенных рассуждений, всегда одинаково направленные, то (16) можно записать в векторном виде, так что окончательно получим:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (17)$$

Это равенство называется законом Ома в дифференциальной форме, хотя в него не входят производные, именно потому, что носит локальный характер, в противоположность интегральной форме (3) этого закона, связывающей величины, относящиеся к различным точкам проводящего пространства.

Из (17) следует, что в однородных средах ($\lambda = const$) в областях, где ток течет под действием только электрических сил, линии тока совпадают с силовыми линиями электрического поля.

§ 9.6. Условие стационарности токов

Самое общее условие стационарности, или постоянства, токов было сформулировано нами в начале этой лекции (условие (1)). Оно сводится к требованию, чтобы в любой точке проводящей среды объемная плотность заряда не менялась со временем. Поскольку любые изменения (или постоянство) этой плотности связаны с неизбежным движением электрических зарядов, условие это накладывает некие общие ограничения на распределение текущих по проводнику постоянных токов.

Для выявления этих ограничений выделим внутри проводящей среды,

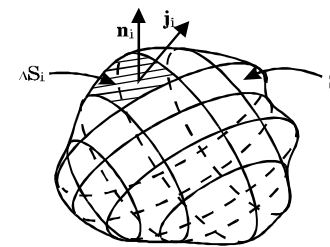


Рис. 10.

несущей постоянный ток, произвольную замкнутую поверхность (рис. 10). Проходящий через эту поверхность полный ток (т. е. вытекающий изнутри) равен в соответствии с (9) потоку вектора \mathbf{j} через нее. Но выходящий ток, по определению (2), есть «убыль» заряда, находящегося внутри S , в единицу времени, а из условия постоянства тока (1) этот заряд не может ни убывать, ни возрастать. Следовательно, общее условие стационарности токов может быть сформулировано следующим образом: поток вектора \mathbf{j} через любую замкнутую поверхность равен нулю, т. е.

может быть сформулировано следующим образом: поток вектора \mathbf{j} через любую замкнутую поверхность равен нулю, т. е.

$$\sum_S \mathbf{j}_n \Delta S_i = 0, \quad (18)$$

где суммирование производится по всем элементам поверхности S .

Следствие 1. Поскольку густота линий \mathbf{j} пропорциональна j , то поток этого вектора через любую поверхность (как и для линий \mathbf{E}) пропорционален (алгебраическому) числу линий, пересекающих эту поверхность. Поэтому из условия (18) следует, что линии тока не имеют истоков, т. е. они не могут ни начинаться, ни кончаться (если бы такие точки существовали, то, окружая их замкнутыми поверхностями, мы получали бы отличный от нуля поток через них, ибо входило бы и выходило разное число линий, что противоречит (18)). Значит, они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность двумя концами¹⁰.

Понятно, что на практике реализуется всегда лишь первая возможность.

Следствие 2. Внутри однородных проводников, несущих постоянные токи, объемные заряды не образуются. Действительно, подставляя в (18) вытекающее из закона Ома (17) соотношение

$$j_n = \lambda E_n$$

и вынося $\lambda = const$ за знак суммы, получим

$$\sum_S j_{ni} \Delta S_i = \sum_S \lambda E_{ni} \Delta S_i = \lambda \sum_S E_{ni} \Delta S_i = 0.$$

Но по теореме Гаусса

$$\sum_S E_{ni} \Delta S_i = \frac{q}{\epsilon_0},$$

где q – заряд внутри поверхности S . Стало быть, $q = 0$.

Полученный результат на первый взгляд может вызвать недоумение: то, что стационарность токов требует постоянства со временем объемной плотности зарядов в любой точке проводника – это понятно, но теперь мы доказали, что она (при $\lambda = const$) должна быть равна нулю! Где же тогда располагаются заряды, создающие внутри проводника электрическое поле? Конечно же, они группируются не на зажимах источника, к которому подключен проводник: ведь внутри длинного однородного провода с током поле тоже однородно и заряды, расположенные на его концах, такое поле создать никак не могут (кулоновское поле убывает с расстоянием r от зарядов, как $1/r^2$).

Заряды, возбуждающие поле в проводнике с током, размещаются на его поверхности (разумеется, неравномерно). Процесс этот довольно сложен и происходит очень быстро (со скоростью, близкой к скорости света).

¹⁰ Мы не рассматриваем точек неопределенности поля, где $E = 0$ (ср. сказанное о силовых линиях в лекции 11).

При этом одна половина провода (подсоединенная к положительному выводу источника) заряжается положительно, другая – отрицательно. Для установления такого распределения зарядов не нужно смещаться на расстояния, сравнимые с длиной проводника: чтобы в какой-то его области образовался избыточный, например, отрицательный заряд (рис. 11), нужно, чтобы с одной стороны в нее вошло больше «минусов», чем вышло с другой. При подключении провода к источнику заряды, скопившиеся, скажем, у его отрицательного полюса, «толкают» свободные одноименные носители близлежащего участка проводника, те «толкают» следующие и т. д. В итоге они лишь чуть-чуть смещаются (все по-разному), сообщая избыточный заряд каждому участку проводника, и затем (или одновременно) уходят на его поверхность, образуя необходимую поверхностную плотность для создания внутри однородного поля. Переходный процесс быстро заканчивается, и в дальнейшем устанавливается стационарное течение зарядов, образующих постоянный ток.

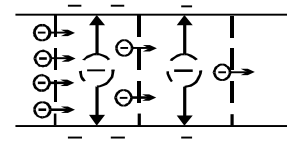


Рис. 11.

А если ток течет по проводнику сложной формы, в котором линии тока не параллельны? Может ли в произвольном случае необходимое поле быть образовано лишь поверхностными зарядами? Да, и мы в состоянии утверждать это не только на основании доказанного следствия 2. Чтобы поверхностным зарядам создать внутри проводника произвольное поле E , нужно просто поместить его в это статическое поле (точнее, в противоположное ему). Тогда поверхностный заряд проводника «занулит» внутри это внешнее поле $-E$, т. е. образует как раз требуемое поле E .

Контрольные вопросы и задания

1. Существует ли внутри проводника с током электрическое поле? Является ли поверхность такого проводника эквипотенциальной?
2. Чем отличается поле постоянного тока, т. е. движущихся зарядов, от поля точно так же распределенных неподвижных зарядов?
3. Дать определение электрического тока. Это вектор или скаляр, алгебраическая (могущая быть отрицательной) или арифметическая (всегда положительная) величина?
4. Сформулировать закон Ома. Что называется напряжением, приложенным к концам проводника? Чем оно отличается от напряженности электрического поля?
5. В каких единицах измеряются ток и сопротивление? Дать их опре-

деления.

6. Сформулировать первое начало термодинамики для проводника с постоянным током в установившемся режиме.

7. Сформулировать закон Джоуля.

8. Что называется плотностью тока? Это вектор или скаляр, алгебраическая или арифметическая величина?

9. Как связаны между собой ток, протекающий через какую-либо поверхность, и плотность тока в различных точках этой поверхности (могушая меняться от точки к точке)?

10. Что такое линия тока? Трубка тока?

11. Показать, что внутри однородного цилиндрического проводника ток равномерно распределён по сечению.

12. Показать, что сопротивление однородного цилиндрического проводника прямо пропорционально его длине и обратно пропорционально сечению проводника.

13. Описать методику расчёта сопротивления проводника произвольной формы.

14. Вывести формулы для расчёта сопротивления последовательного и параллельного соединений проводников.

15. Получить закон Ома в дифференциальной форме. Почему она называется дифференциальной?

16. Получить условие стационарности токов.

17. Показать, что линии тока не имеют истоков (точек обрыва).

18. Показать, что в однородных проводниках с постоянными токами не могут образовываться объёмные заряды. Почему это не выполняется для неоднородных проводников?

Лекция 15**§ 9.7. Сторонние электродвижущие силы (ЭДС)**

На первый взгляд может показаться, что условие стационарности токов (18л14), из которого вытекает замкнутость линий тока (§9.6, следствие 1), вместе с законом Ома в дифференциальной форме (17л14) противоречит потенциальности электрического поля. В самом деле, из (17л14) следует, что линии \mathbf{j} и \mathbf{E} совпадают, но первые должны быть практически всегда замкнутыми, вторые же замкнутыми никогда быть не могут. Противоречие разрешается следующим образом. Условия стационарности токов и потенциальности электрического поля выполняются всегда, закон же Ома (17л14) – лишь там, где присутствуют только электрические (кулоновы) силы. Это значит, что вдоль *всей* замкнутой линии тока линия \mathbf{E} не может с ней совпадать, т. е. на первой обязательно должны быть участки, где закон Ома в форме (17л14) оказывается несправедливым. Другими словами, постоянные токи течь везде под действием только электрических сил не могут и любая система проводников, несущих такие токи, обязана иметь области, в которых кроме электрических действуют еще и так называемые сторонние (т. е. некулоновского происхождения) силы. Впрочем, в необходимости существования таких сил мы убедились и в начале предыдущей лекции, когда рассматривали в общих чертах механизм появления тока в проводнике: движение зарядов под действием только электрических сил приводит к выравниванию потенциалов всех его точек и к исчезновению тока.

Итак, рассмотрим участки проводящей среды, где могут существовать силы различной природы. Эти силы мы разобьем на две группы: электрические (или электростатические; пока это одно и то же), вызванные распределением электрического заряда, и все остальные, природой которых мы сейчас не интересуемся. Эти остальные силы мы назовем сторонними (т. е. неэлектрическими), причем будем рассматривать только те из них, величина которых пропорциональна заряду, испытывающему их влияние, т. е. будем считать

$$\mathbf{F}^{стп} = q \mathbf{E}^{стп}, \quad (1)$$

где $\mathbf{F}^{стп}$ – сторонняя сила, действующая на заряд q , а вектор $\mathbf{E}^{стп}$ назовем напряженностью поля сторонних сил или просто сторонним полем, существующим в данной области пространства.

§ 9.8. Закон Ома для участка цепи со сторонней ЭДС

Поскольку электрический ток – это движение зарядов под действием сил, а движение это определяется величиной и направлением этих сил, но не их природой, под совокупным действием электрического \mathbf{E} и стороннего \mathbf{E}^{cmp} полей возникнет, очевидно, ток, плотность которого по аналогии с (17л14)

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmp}). \quad (2)$$

Это выражение представляет собой дифференциальную форму обобщенного закона Ома, из которой нетрудно получить и интегральную его форму. При этом мы ограничимся (достаточно общим) случаем так называемых квазилинейных трубок тока, или просто квазилинейных токов.

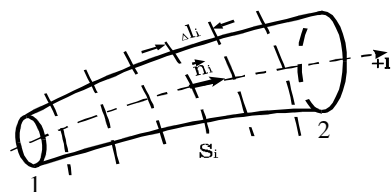


Рис. 1

Под квазилинейной трубкой тока мы будем понимать такую трубку, для которой можно определить направление ее оси так, чтобы все электрические величины (\mathbf{j} , λ , φ , \mathbf{E} , \mathbf{E}^{cmp} и т. д.) в любом перпендикулярном этой оси сечении были постоянными в пределах заданной

точности (но могли меняться от сечения к сечению) и чтобы вектор \mathbf{j} плотности тока был параллелен (или антипараллелен) этой оси. Практически любой ток может быть представлен совокупностью достаточно тонких квазилинейных трубок. Введение понятия квазилинейного тока позволяет нам свести рассмотрение всего тока к рассмотрению его оси, которую мы будем называть контуром тока¹¹.

Итак, пусть дана квазилинейная трубка тока (рис.1). Выберем произвольно положительное направление ее оси $+l$ и возьмем, идя вдоль него, два сечения 1 и 2. Разобьем полученный отрезок трубки перпендикулярными ее оси сечениями на n малых участков, причем направление положительной нормали \mathbf{n} к каждому сечению выберем совпадающим с $+l$. Запишем обобщенный закон Ома (2) для i -го участка и умножим обе его части скалярно на элемент оси тока $\Delta l_i = \mathbf{n}_i \Delta l_i$:

$$j_{ni} \Delta l_i = \lambda_i (E_{li} \Delta l_i + E_{li}^{cmp} \Delta l_i),$$

где j_{ni} , E_{li} и E_{li}^{cmp} – нормальные, или осевые, проекции соответствующих векторов. Просуммируем теперь полученные выражения вдоль всего

¹¹ Фактически мы уже использовали понятие квазилинейного тока в § 9.4, когда рассчитывали сопротивление проводника произвольной формы.

отрезка оси трубки 1 – 2, разделив предварительно каждое из них на λ_i :

$$\sum_{i=1}^n \frac{j_{ni} \Delta l_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n E_{li} \Delta l_i + \sum_{i=1}^n E_{li}^{cmp} \Delta l_i .$$

Но $j_{ni} = \frac{I}{S_i}$, где I – ток внутри трубки, а S_i – сечение i -го ее участка. Вынося I за знак суммы, получим

$$I \sum_{i=1}^n \frac{\Delta l_i}{\lambda_i S_i} = \sum_{i=1}^n E_{li} \Delta l_i + \sum_{i=1}^n E_{li}^{cmp} \Delta l_i . \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta l_i}{\lambda_i S_i} = R_{12}$$

представляет собой не что иное, как сопротивление рассматриваемого отрезка 1 – 2 проводника (ср. (15л14)), а

$$\sum_{i=1}^n E_{li} \Delta l_i = \varphi_1 - \varphi_2$$

– разность потенциалов между первым φ_1 и вторым φ_2 его сечениями (если идти вдоль выбранного положительного направления его оси). Сумма же

$$\sum_{i=1}^n E_{li}^{cmp} \Delta l_i \equiv \mathcal{E}_{12} \quad (4)$$

называется сторонней электродвижущей силой, действующей на участке 1 – 2 проводника, и представляет собой работу сторонних сил по перенесению единичного положительного заряда от сечения 1 к сечению 2.

С учетом трех последних соотношений равенство (4) принимает следующий вид:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} . \quad (5)$$

Это выражение называется обобщенным законом Ома в интегральной форме. Оно показывает, что в случае действия сторонних сил произведение IR определяется алгебраической суммой электрического напряжения и сторонней ЭДС. Если на данном участке сторонние силы отсутствуют, т. е. $\mathcal{E}_{12} = 0$, то (5), естественно, переходит в закон Ома (3л14) в своей обычной (необобщенной) форме.

§ 9.9. Закон Ома для замкнутой цепи. Правила Кирхгофа

Если квазилинейный ток замкнут, то, применяя к нему формулу (5), получим закон Ома для замкнутой цепи

$$IR = \mathcal{E}, \quad (6)$$

где \mathcal{E} – полная ЭДС в рассматриваемой цепи (равная, очевидно, алгебраической сумме всех ЭДС на каждом его участке). Таким образом, ток в замкнутой цепи определяется (помимо ее сопротивления R) лишь действующими в ней сторонними силами и не зависит от распределения потенциала вдоль нее. Физически исчезновение члена $\varphi_1 - \varphi_2$ в (5) при переходе к замкнутому контуру обусловлено потенциальностью электрического поля. Ведь разность потенциалов между концами любого отрезка пропорциональна работе сил поля на этом отрезке, и, если он замкнут, должна, конечно, обратиться в нуль.

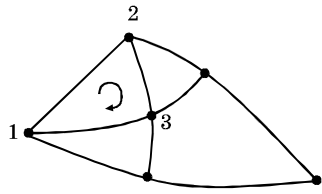


Рис. 2

Рассмотрим теперь произвольную цепь с разветвлениями, состоящую из участков, на каждом из которых текут (вообще говоря, разные) квазилинейные токи (рис. 2). Составим из таких участков какой-либо замкнутый контур (например 1 – 2 – 3 – 1) и выберем произвольно положительное направление его обхода, которое задаст положительные направления на каждом его участке. Записывая для этих участков обобщенный закон Ома (5), получим

$$I_{12}R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12},$$

$$I_{23}R_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_{23},$$

$$I_{31}R_{31} = \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_{31},$$

где I_{mn} – ток, текущий по участку mn (взятый с соответствующим знаком).

Суммирование этих уравнений с заменой обозначений дает

$$\sum_{k=1}^N I_k R_k = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k, \quad (7)$$

где I_k, R_k и \mathcal{E}_k – соответственно ток, сопротивление и ЭДС, отнесенные к каждому участку, а N – их число в контуре. Разности потенциалов, существующие на отдельных участках, при сложении вдоль замкнутого контура, очевидно, и здесь взаимно уничтожатся ввиду потенциального характера электростатического поля. Соотношение (7) называется вторым пра-

вилом (или законом) Кирхгофа. Оно утверждает, что в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений типа $I_k R_k$ равна сумме (тоже алгебраической) сторонних ЭДС, действующих на этом контуре. Нетрудно видеть, что закон Ома для замкнутой цепи (6) есть частный случай правила Кирхгофа (7), когда токи во всех участках контура одинаковые.

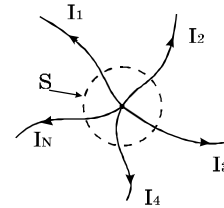


Рис. 3.

Первое правило (закон) Кирхгофа является прямым следствием условия стационарности токов (18л14) и относится к узлам, т. е. точкам разветвления токов (рис. 3). Окружая узел произвольной замкнутой поверхностью S и записывая поток вектора \mathbf{j} (т. е. полный ток) через нее как алгебраическую сумму пересекающих ее квазилинейных токов, получим

$$\sum_S j_{ni} \Delta S_i = I_1 + I_2 + \dots + I_N = \sum_{k=1}^N I_k = 0, \quad (8)$$

где вытекающие токи (как дающие положительный вклад в поток) считаются положительными, а втекающие – отрицательными. Это выражение и представляет собой содержание 1 закона Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, вытекающих из любого узла, равна нулю.

Применяя 1 и 2 правила Кирхгофа к различным контурам и узлам произвольной разветвленной цепи, можно всегда найти токи, текущие по любому ее участку, зная которые нетрудно получить (используя обобщенный закон Ома (5)) и напряжения на каждом из них.

В качестве примера рассмотрим батарею параллельно соединенных источников ЭДС, включенных на некоторое сопротивление нагрузки R (рис. 4 а)¹², и зададимся вопросом, может ли она быть заменена одним

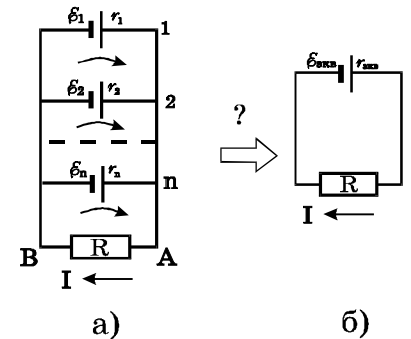


Рис. 4.

эквивалентным источником, и если да, то как найти его ЭДС $\mathcal{E}_{экв}$ и внут-

¹² Действующую на каком-либо участке цепи ЭДС принято изображать знаком $\text{---}| \text{---}$. При этом поле сторонних сил считается направленным от короткого перпендикулярного отрезка к длинному (т. е. на данном рисунке слева направо).

ренное сопротивление $r_{\text{экв}}$?

Для ответа на этот вопрос напишем второй закон Кирхгофа сначала для контура, образованного источником \mathcal{E}_1 и нагрузкой R , выбрав направление его обхода, как указано на рис. 4 а, и пренебрегая сопротивлением соединительных проводов:

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1,$$

где I_1 – ток через элемент \mathcal{E}_1 , r_1 – его внутреннее сопротивление, а I – ток во внешней цепи (через R). Разделив это соотношение на r_1 , получим

$$I_1 + IR \frac{1}{r_1} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1}.$$

Напишем теперь аналогичные выражения для контуров $\mathcal{E}_2 r_2 R$, $\mathcal{E}_3 r_3 R, \dots, \mathcal{E}_n r_n R$ и сложим их все:

$$\sum_{k=1}^n I_k + IR \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}_k}{r_k}. \quad (9)$$

Но по первому правилу Кирхгофа, примененному к узлу A (точки 1, 2, ..., n , A можно, очевидно, считать одной точкой – ведь они соединены проводниками, не имеющими сопротивлений),

$$\sum_{k=1}^n I_k = I,$$

так что (9) примет вид

$$I \left(1 + R \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}_k}{r_k}. \quad (10)$$

Если замена рассматриваемой батареи одним источником возможна, то (10) должно быть эквивалентно закону Ома для замкнутой цепи рис. 4 б

$$I(r_{\text{экв}} + R) = \mathcal{E}_{\text{экв}},$$

или

$$I \left(1 + \frac{R}{r_{\text{экв}}} \right) = \frac{\mathcal{E}_{\text{экв}}}{r_{\text{экв}}}. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), заключаем, что они тождественно совпадут, если

$$\frac{1}{r_{\text{эkv}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}, \quad (12)$$

$$\mathcal{E}_{\text{эkv}} = r_{\text{эkv}} \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}_k}{r_k}. \quad (13)$$

Итак, замена возможна, причем параметры эквивалентного элемента даются формулами (12) и (13). Впрочем, как явствует из приведенных рассуждений, эквивалентность эта справедлива только по отношению к внешней цепи, которая никак не «почувствует» замены, ибо значения тока и напряжения в ней сохранятся. Что же касается *мощности*, выделяемой *внутри* батареи и эквивалентного источника, то, как мы увидим в следующем параграфе, схемы эти отнюдь не равноценны. Это понятно уже из того факта, что при размыкании внешней цепи в схеме рис. 4 б исчезает ток, в то время как в батарее рис. 4 а останутся внутренние токи, приводящие даже в случае разомкнутой внешней цепи к выделению тепла.

Найденные параметры эквивалентного источника позволяют без труда полностью описать процессы в схеме рис. 4 а. Определим, например, напряжение и ток, текущий в k -том элементе.

Во внешней цепи сторонних сил нет, а потому по закону Ома (3л14)

$$U \equiv \varphi_A - \varphi_B = IR.$$

Но в соответствии с (6)

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{эkv}}}{R + r_{\text{эkv}}},$$

стало быть,

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_{\text{эkv}} \frac{R}{R + r_{\text{эkv}}}.$$

Для вычисления тока через k -тый элемент, где уже действуют сторонние силы, применим обобщенный закон Ома (5)

$$I_k r_k = \varphi_B - \varphi_A + \mathcal{E}_k$$

(напряжение сменило знак, потому что мы любой участок цепи проходим по часовой стрелке, в соответствии с выбранными на рис. 4 а направлениями обхода контуров), откуда

$$I_k = \frac{\mathcal{E}_k}{r_k} - \frac{\mathcal{E}_{\text{эkv}}}{r_k} \frac{R}{R + r_{\text{эkv}}}.$$

§ 9.10. Обобщенный закон Джоуля.

Превращения энергии в цепи постоянного тока

Умножая обе части обобщенного закона Ома для участка цепи (5) на силу текущего по нему тока I , получим

$$I^2 R_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I. \quad (14)$$

Первый член правой части

$$(\varphi_1 - \varphi_2)I = UI = P_{эл} \quad (15)$$

представляет собой, очевидно, мощность $P_{эл}$ электрических сил на рассматриваемом участке. Действительно, произведение $U\Delta q$ – это работа поля по переносу заряда Δq от сечения 1 до сечения 2, и если разделить ее на время этого переноса, то получим как раз мощность, развиваемую электрическими силами при прохождении по участку тока I . Совершенно аналогично второй член в (14)

$$\mathcal{E}_{12}I = P_{сmp} \quad (16)$$

есть не что иное, как мощность $P_{сmp}$ сторонних сил на участке 1 – 2. Если над данным отрезком проводника никакими другими внешними силами работа не совершается и его механическая энергия не меняется, то по первому началу термодинамики в установившемся режиме вся эта мощность должна выделяться в виде теплоты, отданной окружающим телам. Таким образом, левая часть (14)

$$I^2 R = P_{дж} \quad (17)$$

выражает мощность $P_{дж}$ тепловых, или джоулевых, потерь, т. е. теплоту, отданную в единицу времени рассматриваемым участком.

Равенство (14) носит название обобщенного закона Джоуля для участка цепи. Вскрыв физический смысл его правой части и используя I начало, мы выявили содержание левой части (14): это отданная теплота (в единицу времени). Стало быть, возвращаясь к обсуждению необобщенного закона Джоуля (4л14) в предыдущей лекции, можно утверждать, что, действительно, именно формула (17) всегда дает выделяющееся тепло¹³.

¹³ Строго говоря, это справедливо лишь в том случае, когда природа сторонних сил такова, что не предполагает превращения теплоты, заимствованной от окружающих тел (или самого проводника) в их работу. Такое, однако, выполняется не всегда. Например, при контакте двух различных металлов в зависимости от направления проходящего через контакт тока в нем может выделяться или поглощаться так называемое тепло Пельтье, связанное как раз с особой природой действующих в контакте сторонних сил. Соотношение (14) будет, разумеется, справедливо и в этом случае (ибо в нем природа сторонних сил несущественна), но член

Соотношение же (15) представляет собой мощность электрических сил, которая только в случае отсутствия сторонних сил совпадает с (17). Физически равенство (17) отличается от (15), (16) или выражения U^2/R тем, что в него не входят характеристики действующих на данном участке электрических или сторонних сил: выделяющееся тепло оно связывает лишь со свойствами проводника (сопротивлением) и текущим по нему током. Как бы ни менялись работы электрических и сторонних сил, но если при этом $I = const$, то и джоулево тепло останется неизменным.

Применяя (14) к замкнутому неразветвленному контуру (или, что то же, умножая (6) на ток I), получим закон Джоуля для замкнутой цепи

$$I^2 R = \mathcal{E} I, \quad (18)$$

откуда мощность электрических сил при суммировании по замкнутой кривой снова, естественно, выпадает. Таким образом, общее количество джоулева тепла, выделяющееся во всей цепи, равно полной работе (за это же время) сторонних сил в этой цепи.

Соотношение (18) является не локальным, оно носит интегральный характер, т. е. выполняется *в целом* для замкнутого контура, но не для отдельных его участков. Это значит, что если сторонние силы сосредоточены на малом отрезке замкнутой цепи, то и работу они будут совершать только на этом отрезке (ибо в остальных частях цепи $E^{cmp} = 0$). Джоулево тепло же будет выделяться во всей цепи (там, где есть сопротивление). Стало быть, с энергетической точки зрения роль электрического тока сводится к переносу отдаваемой сторонними силами энергии в отдаленные участки цепи.

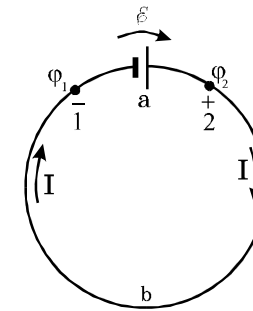


Рис. 5.

Рассмотрим в качестве примера замкнутый проводник, несущий квазилинейный ток (рис. 5), сторонние силы внутри которого действуют лишь на участке a и направлены от 1 к 2. В соответствии с законом Ома (6) в цепи возникнет направленный по часовой стрелке ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_a + R_b},$$

где \mathcal{E} – ЭДС источника сторонних сил, а R_a и

$\mathcal{E}_{12} I$, представляющий собой мощность сторонних сил, фактически даст выделившееся или поглотившееся тепло, которое надо добавить (с соответствующим знаком) к джоулеву. Мы, впрочем, такие ситуации рассматривать не будем.

R_b – сопротивления участков a и b контура. Поскольку на участке b сторонних сил нет, ток там течет от большего потенциала к меньшему, т. е. $\varphi_2 > \varphi_1$. Выбирая далее положительное направление вдоль I и применяя обобщенный закон Ома к участку a , получим

$$IR_a = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

откуда

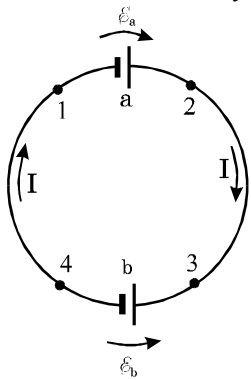
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} - IR_a,$$

т. е. хотя потенциал точки 2 оказывается выше потенциала точки 1, разность $\varphi_2 - \varphi_1$ остается меньше \mathcal{E} на величину IR_a .

Таким образом, во внешней цепи b ток, как уже отмечалось, течет под действием только электрических (кулоновых) сил от большего потенциала φ_2 к меньшему φ_1 , стремясь сравнять эти потенциалы. Внутри же отрезка a он направлен «навстречу» разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ за счет действующих бо́льших по величине сторонних сил. Эти силы, преодолевая кулоновское отталкивание, непрерывно нагнетают положительные заряды (для отрицательных – наоборот) от меньшего потенциала φ_1 к большему φ_2 , откуда они опять стекают по участку b к точке 1, и т. д. При этом мощность источника

$$\mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R_a + R_b} = I^2R_a + I^2R_b$$

выделится в виде джоулева тепла (в единицу времени) I^2R и распределится между участками a и b , очевидно, пропорционально их сопротивлениям. Если выбрать сопротивление внешней цепи $R_b \gg R_a$ и сгруппировать его на малом ее отрезке, то на нем выделится почти вся развиваемая источником мощность.



Пусть теперь на участке b имеется еще одна ЭДС \mathcal{E}_b , меньшая действующей на a \mathcal{E}_a и направленная навстречу ей (рис. 6). В цепи согласно (6) возникнет ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b}{R}$$

Рис. 6.

(где R – ее полное сопротивление), направлен-

ный по \mathcal{E}_a и навстречу \mathcal{E}_b . При этом сторонние силы на участке a будут совершать положительную работу (ибо действуют вдоль тока), на участке же b работа их будет отрицательной. Кроме того, в цепи будут иметь место джоулевы тепловые потери, мощность которых

$$P_{дж} = I^2 R = (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b) I = \mathcal{E}_a I - \mathcal{E}_b I,$$

откуда

$$\mathcal{E}_a I = I^2 R + \mathcal{E}_b I.$$

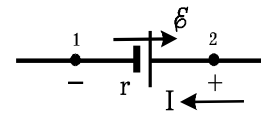


Рис. 7.

Таким образом, развиваемая на участке a сторонними силами мощность $\mathcal{E}_a I$ пойдет, во-первых, на выделение джоулева тепла и, во-вторых, на преодоление «сопротивления», оказываемого току ЭДС \mathcal{E}_b на участке b . Ток здесь будет течь за счет действия электрических сил¹⁴, совершающих при этом положительную работу (в единицу времени) $\mathcal{E}_b I$ против сил сторонних. Именно она и будет «потребляться» как полезная источником этих сторонних сил. Иными словами, в цепи будет происходить перенос энергии от a к b с потерями мощности $P_{дж}$ на тепло. Так будет обстоять дело, например, если на участке b включен заряжаемый током аккумулятор или электродвигатель, вращение которого вызывает появление ЭДС индукции, направленной навстречу току.

Чтобы еще отчетливее проиллюстрировать описанные превращения энергии, рассмотрим один из этих примеров подробнее. Пусть, скажем, заряжаемый аккумулятор (рис. 7) имеет параметры $\mathcal{E} = 12$ В, $r = 0,01$ Ом и ток заряда $I = 10$ А. Будет ли он нагреваться? Велики ли полная и полезная мощности? Какими силами они будут развиваться?

Греться аккумулятор, конечно, будет, причем вне зависимости от того, заряжается он или разряжается. Выделяемая тепловая мощность дается выражением (17) и в нашем случае составляет

$$P_{дж} = I^2 r = 1 \text{ Вт.}$$

Полная мощность на участке 1 – 2 развивается электрическими силами (вдоль которых течет ток) и в соответствии с (15) равна

$$P_{эл} = UI,$$

¹⁴ Очевидно, что в этом случае $\Phi_3 > \Phi_4$, ибо ток может течь навстречу сторонним силам лишь при наличии превосходящих и противоположно направленных электрических сил.

где $U = \varphi_2 - \varphi_1$. Для ее отыскания применим к участку обобщенный закон Ома (5) и найдем напряжение на его концах. Идя по направлению тока на рис. 7, запишем

$$Ir = \varphi_2 - \varphi_1 - \mathcal{E},$$

откуда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} + Ir = 12,1 \text{ В.}$$

Таким образом, $P_{эл} = 121 \text{ Вт}$ и лишь очень малая доля ее переходит в тепло. Главная часть является полезной мощностью, которая выделяется за счет работы электрических сил против сил сторонних. Работа эта идет на увеличение химической энергии аккумулятора и равна, очевидно (в единицу времени),

$$|P_{сmp}| = \mathcal{E}I = 120 \text{ Вт.}$$

Стóит чуть уменьшить напряжение на зажимах аккумулятора, как направление тока изменится и сторонние силы начнут уже совершать положительную работу, заставляя ток течь навстречу меньшим по величине электрическим силам. Греться при этом источник, как уже отмечалось, конечно, тоже будет.

Контрольные вопросы и задания

1. Как согласовать следующие утверждения: $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$; линии \mathbf{j} всегда (на практике) замкнуты; линии \mathbf{E} всегда не замкнуты?
2. Какие силы называются сторонними?
3. Что такое квазилинейная трубка тока?
4. Получить обобщенный закон Ома (для участка цепи с ЭДС).
5. Вывести закон Ома для замкнутой цепи, а также первое и второе правила Кирхгофа.
6. Получить выражения для $\mathcal{E}_{экв}$ и $r_{экв}$ параллельно соединенных источников ЭДС.
7. Получить обобщенный закон Джоуля для участка цепи и для всей цепи.
8. Под действием каких сил течёт ток внутри и снаружи источника, нагруженного на внешнее сопротивление? Какие силы внутри действуют навстречу току?
9. Под действием каких сил течёт ток внутри заряжаемого аккумулятора? Какие силы внутри действуют навстречу току? Чему равна при этом полезная мощность? Какими силами она будет развиваться?

Лекция 16

Глава 10. МАГНИТОСТАТИКА

Опыт дает, что между проводниками, несущими токи, имеются определенные силы взаимодействия. Эти силы существенно отличаются от кулоновских и не могут быть к ним сведены. По историческим причинам их называют магнитными, а раздел электродинамики, с которого мы начнем их изучение, – магнитостатикой. В этом разделе мы будем рассматривать взаимодействие неподвижных проводников в вакууме, по которым текут постоянные токи.

§ 10.1. Взаимодействие постоянных токов

Стоящую перед нами задачу в общем виде можно сформулировать следующим образом. Даны два (или несколько) произвольных контура с токами. Определить силы, испытываемые каждым контуром или любой его частью.

Исследуя подобную проблему в электростатике, мы разбивали каждый заряд на малые элементы (точечные заряды) и искали закон их взаимодействия. Найдя его из опыта и убедившись (опять же на опыте) в справедливости принципа суперпозиции, мы могли считать поставленную задачу решенной, ибо любой заряд можно собрать из точечных, закон взаимодействия между которыми известен и не искажается присутствием других зарядов.

Естественно и в магнитостатике попытаться воспользоваться подобным рецептом: сначала найти силы взаимодействия между элементами, из которых может быть составлен *любой* ток, а затем, ожидая выполнения принципа суперпозиции и здесь, простым суммированием определить результирующие силы, действующие на произвольный контур или любую его часть.

Продолжая эту аналогию с электростатикой, отметим далее, что для облегчения решения задачи взаимодействия двух (или нескольких) зарядов, мы разбивали ее на две независимые подзадачи, вводя понятие электрического поля и рассчитывая отдельно поле, создаваемое зарядами-источниками, и силы, испытываемые зарядами, находящимися в нем. Магнитное взаимодействие, во многом похожее на электрическое, оказывается существенно сложнее его, и потому подобное расчленение проблемы здесь (если оно возможно) сулит еще большие преимущества.

Итак, приступая к изучению магнитного взаимодействия токов, мы с самого начала будем придерживаться следующего взгляда. Каждый элемент тока, представляющий собой короткий прямолинейный отрезок

очень тонкой трубки тока¹⁵, возбуждает в окружающем пространстве магнитное поле. Поля различных элементов как-то накладываются друг на друга и совместно воздействуют определенным образом на любой ток, помещенный в это результирующее поле. В рамках магнитостатики понятие поля может рассматриваться как чисто условное, введенное нами для облегчения расчетов, однако при изучении переменных полей мы убедимся, что поле это является самостоятельным материальным объектом, обладающим реальными физическими свойствами.

Прежде чем формулировать законы, управляющие магнитными силами, нам необходимо несколько развить наш математический аппарат.

§ 10.2. Векторное произведение векторов

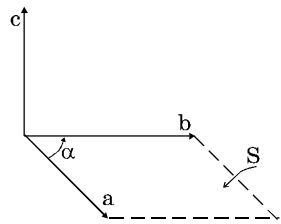


Рис. 1.

Векторным произведением двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad (1)$$

который строится следующим образом. Приведем векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} к общему началу, сохраняя их направления в пространстве (рис. 1). Тогда длина c равна произведению длин сомножителей на синус угла α между ними:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad (2)$$

\mathbf{a} направление перпендикулярно плоскости, проведенной через \mathbf{a} и \mathbf{b} , и образует с ними правовинтовую тройку. Это значит, что если вращать рукоятку правого винта от первого вектора \mathbf{a} ко второму \mathbf{b} по кратчайшему расстоянию, то вектор \mathbf{c} направлен туда, куда будет двигаться сам винт. Или иначе: вектор \mathbf{c} направлен туда, откуда нужно смотреть, чтобы видеть поворот от первого вектора ко второму по кратчайшему расстоянию против часовой стрелки.

Из приведенного определения следует, что векторное произведение некоммутативно, т. е. порядок сомножителей в нем существен. Очевидно,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]. \quad (3)$$

Величина же его численно равна площади параллелограмма S , построенного на векторах-сомножителях как на сторонах (рис. 1):

$$|\mathbf{c}| = S. \quad (4)$$

Остальные свойства векторного произведения, необходимые в последующем изложении, мы будем вводить по мере надобности.

¹⁵ Такие токи с бесконечно малым поперечным сечением мы будем называть линейными.

§ 10.3. Вектор магнитной индукции

Как показывает опыт, величина силы F , испытываемой малым элементом линейного тока со стороны других токов, или, что то же самое, со стороны создаваемого ими поля, пропорциональна произведению тока I на длину элемента Δl . Поэтому отношение этой силы к произведению $I\Delta l$ уже не зависит от параметров рассматриваемого элемента тока и может служить количественной характеристикой внешнего поля, в которое помещен этот элемент. Однако все тот же опыт показывает, что действие данного поля на элемент зависит еще и от его *ориентации*, так что простое деление F на $I\Delta l$ поля не даст¹⁶. Из трех векторов F , Δl и поля нужно сконструировать, если это возможно, такую комбинацию, чтобы изменение ориентации Δl , приводящее к изменению F , *не меняло* величины и направления внешнего магнитного поля, действующего на данный элемент (иначе это поле уже не будет внешним, не зависящим от манипуляций с нашим элементом). Эксперимент говорит, что это возможно, и дает следующее соотношение, которое следует рассматривать как *определение* магнитного поля¹⁷:

$$F = I [\Delta l, B], \quad (5)$$

где B – вектор магнитной индукции (называемый так по исторически сложившейся терминологии), вполне аналогичный вектору электрического поля E , а Δl направлен, очевидно, в ту сторону, куда течет ток в рассматриваемом элементе. Вектор B мы часто будем называть вектором магнитного поля или просто магнитным полем.

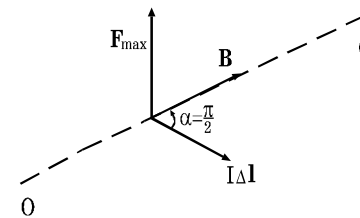


Рис. 2.

Таким образом, чтобы экспериментально определить магнитное поле в какой-либо точке пространства, нужно поместить в эту точку малый элемент тока $I\Delta l$ (рис. 2) и, изменяя его ориентацию, добиться такого положения (а их, как показывает опыт, если $B \neq 0$, всегда только два), при котором действующая на него сила обратится в нуль. Вектор B , очевидно, будет в этом случае параллелен или антипараллелен элементу (пунктир OO' на рис. 2), ибо $\sin \alpha = 0$ и $F \sim \sin \alpha = 0$. Повернув далее Δl в произвольной плоскости на $\pi/2$

¹⁶ Ситуация здесь оказывается сложнее, чем в электростатике, ибо элемент тока, в отличие от элемента заряда, является вектором, т. е. не изотропен (имеет выделенное направление).

¹⁷ Это определение B справедливо в системе единиц СИ. В других системах оно может отличаться от (5) присутствием постоянного размерного коэффициента.

относительно OO' и измерив силу F_{max} , испытываемую элементом, найдем магнитное поле по величине и направлению:

$$B = \frac{F_{max}}{I\Delta l}, \quad (6)$$

а направлено оно так вдоль OO' , чтобы векторы Δl , B и F_{max} образовывали правовинтовую тройку¹⁸.

Наоборот, зная вектор B в любой точке пространства, можно сразу по формуле (5) найти силу, действующую на малый элемент тока. По величине

$$F = I\Delta l B \sin \alpha, \quad (7)$$

а направление ее всегда перпендикулярно току и определяется правилом правого винта. Часто правило, устанавливающее взаимную ориентацию векторов, образующих векторное произведение, формулируют, ссылаясь не на винт с правой резьбой или стрелку часов, а на левую руку человека¹⁹. Тогда его называют правилом левой руки, и для нашего случая оно звучит следующим образом: если левую руку расположить так, чтобы вектор B «входил» в ладонь, а четыре пальца «смотрели» вдоль тока, то отогнутый большой палец укажет направление действующей на элемент силы.

Из (6) может быть получена единица индукции магнитного поля в системе СИ. Она имеет специальное название – тесла (Тл). Очевидно,

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

Во всех приведенных рассуждениях фигурировал малый элемент, «кусочек» постоянного тока, который, как известно, сам по себе, отдельно, существовать не может. Ведь любая цепь постоянного тока обязана быть замкнутой (или идти из бесконечности в бесконечность), а потому рядом с

¹⁸ На первый взгляд кажется, что приведенное определение B является чересчур сложным и неоправданно громоздким. Более наглядным и простым может представиться введение B , скажем, через максимальный момент сил, действующих на маленькую рамку с током, как это сделано, например, в школьном учебнике физики. Однако такой путь логически не вполне корректен. Дело в том, что определяя B как некий материальный объект, агент, ориентирующий рамку, мы не сможем ответить на вопрос, как этот агент будет действовать на произвольный контур с током, или какую-либо его часть, ибо произвольный участок цепи нельзя составить из отдельных рамок. Главным свойством B , лежащим в основе его количественного определения, должна служить способность магнитного поля воздействовать именно на малый участок тока, т. е. на универсальный элемент, из совокупности которых может быть составлен любой ток. Другая причина несостоятельности подобного подхода заключается в том, что действие поля на рамку с током в общем случае не исчерпывается ориентирующим эффектом, и даже в тех случаях, когда исследуемую цепь можно представить совокупностью рамок с током, расчет влияния на нее магнитного поля путем только суммирования вращающих моментов, дает просто неверный результат (ибо не учитывает действующих на рамку деформирующих усилий).

¹⁹ Существуют и другие модификации этого правила.

выделенным ее элементом всегда находятся другие. Можно ли в таком случае говорить о силе, действующей на отдельный элемент, и если да, то как ее измерить?

Несмотря на замкнутость постоянных токов, говорить о такой силе можно. Для ее экспериментального определения достаточно закрепить все участки цепи, предназначенной для исследования магнитного поля, оставив подвижным лишь малый ее отрезок (например так, как изображено на

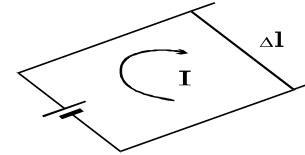


Рис. 3.

его подвижным элементом, можно по описанному рецепту найти \mathbf{B} в любой точке. При этом, конечно, «пробный» элемент тока $I\Delta l$ должен удовлетворять определенным требованиям, аналогичным тем, которым удовлетворяет пробный заряд в электростатике. Элемент этот обязан быть достаточно малым по размеру, так чтобы исследуемое поле на всем его протяжении было постоянным в пределах заданной точности, и величине тока I , чтобы действие этого элемента (а точнее, всей цепи, в которую он входит) на токи, создающие данное поле, не приводило к заметному перераспределению их в пространстве и не искажало, таким образом, исследуемого поля. Кроме того, ток I , текущий по измерительной цепи, должен быть настолько малым, чтобы остальные ее участки не оказывали существенного влияния на ее подвижный элемент. Другими словами, собственное поле контура в месте расположения Δl должно быть много меньше внешнего. В дальнейшем мы будем считать все эти условия выполненными.

§ 10.4. Закон Био – Савара. Принцип суперпозиции

Определение магнитного поля (5), по существу, наполняется физическим содержанием лишь после того, как будет описано, каким образом оно возбуждается текущими токами. Ведь экспериментально проверяется именно действие тока на ток, и без этого описания определение (5) «повисает в воздухе».

Следуя аналогии с электростатикой, мы должны теперь сформулировать закон (аналогичный закону Кулона для поля), позволяющий рассчитать магнитное поле, создаваемое в любой точке пространства (в вакууме)

данным элементом линейного тока. Однако, оставаясь в рамках магнитостатики, *этого сделать нельзя*, ибо, как уже отмечалось, любая цепь постоянного тока замкнута и отдельного элемента такого тока не существует. Таким образом, мы всегда имеем дело с *результатирующим* полем всех элементов этой цепи, а знания результирующей недостаточно для однозначного определения составляющих.

Тем не менее, выходя за эти рамки, т. е. оперируя с переменными токами, могущими быть незамкнутыми и, таким образом, составлять отдельный элемент тока, все-таки удастся сформулировать (и экспериментально подтвердить) интересующий нас закон. Он носит название закона Био – Савара²⁰ и выглядит (в системе СИ) следующим образом:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [\Delta \mathbf{l}, \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (8)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор, проведенный из (любой) точки элемента тока $I\Delta \mathbf{l}$ в точку наблюдения, где этим током создается поле \mathbf{B} , а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ед. СИ – размерный коэффициент, называемый магнитной постоянной²¹.

Из этого закона следует, что поле элемента по величине

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l}{R^2} \sin \alpha \quad (9)$$

при удалении от него вдоль какой-либо прямой убывает (как и поле точечного заряда) обратно пропорционально квадрату расстояния до этого эле-

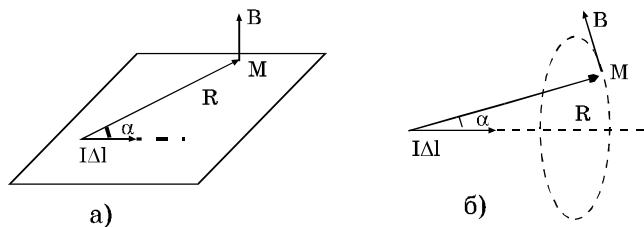


Рис. 4.

мента, но, во-первых, зависит от его ориентации и, во-вторых, всегда перпендикулярно ему (рис. 4 а). Если фиксировать R и менять α , т. е. пере-

²⁰ Часто его называют законом Био – Савара – Лапласа.

²¹ Необходимость введения в формулу (8) этого коэффициента связана с тем обстоятельством, что единицы всех входящих в нее величин уже выбраны. Как выяснится в дальнейшем, единица μ_0 связана с единицей индуктивности – генри (Гн): μ_0 измеряется в Гн/м (ср. с единицей измерения ϵ_0).

мещаться по сфере радиуса R с центром в ΔI , то величина индукции будет меняться пропорционально синусу угла между ΔI и направлением на точку наблюдения M , достигая максимального значения в точках плоскости, проходящей через ΔI и перпендикулярной ему, и обращаясь в нуль на оси тока. Если фиксировать R и α , то получим геометрическое место точек равной величины B , которое, очевидно, представляет собой окружность с центром на оси тока, перпендикулярную этой оси (рис. 4 б). В каждой точке этой окружности вектор B касателен к ней, а потому она представляет собой линию вектора магнитной индукции B . Таким образом, линии B малого элемента тока являются окружностями, перпендикулярными его оси и нанизанными на нее своими центрами, причем направление этих линий образует с направлением тока правовинтовую систему.

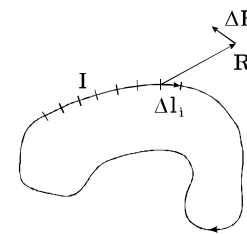


Рис. 5.

Имея формулу (8) для расчета поля малого элемента тока, можно найти поле произвольного тока или системы токов. Для этого необходимо разбить все эти токи на малые элементы, посчитать поле каждого элемента и затем их векторно сложить. При этом, однако, весьма существенным оказывается вопрос: как поле отдельного элемента, даваемое законом Био – Савара, искажается присутствием остальных элементов? Никак, гласит ответ, полученный из эксперимента, дан-

ный элемент в любых условиях создает одно и то же поле (8). Таким образом, так же, как и в электростатике, здесь выполняется принцип суперпозиции, согласно которому *поля, возбуждаемые отдельными элементами, не влияют друг на друга, а лишь накладываются, векторно суммируясь в каждой точке*. Стало быть, вклады каждого элемента произвольной цепи (рис. 5) в общее поле B нужно считать по формуле (8), так что

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{I [\Delta I_i, R_i]}{R_i^3}, \quad (10)$$

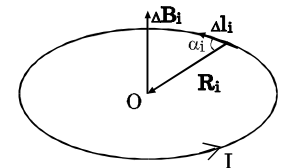


Рис. 6.

где суммирование производится по всем участкам, на которые разбит линейный ток I .

Пример. Найти индукцию магнитного поля в центре кольца радиуса R , несущего линейный ток I (рис. 6).

Разобьем кольцо на маленькие отрезки ΔI_i и посчитаем вклад ΔB_i каждого из них в искомое поле. Очевидно, все ΔB_i будут перпендикулярны плоскости кольца и направлены на рис. 6 вверх. Абсолютная величина

$\Delta \mathbf{B}_i$ в соответствии с (9)

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l_i}{R_i^2} \sin \alpha_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \Delta l_i,$$

ибо все $\alpha_i = \pi/2$ и все $R_i = R$. Суммируя вклады всех участков кольца, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Отметим, что по направлению вектор \mathbf{B} образует с направлением тока в кольце правовинтовую систему.

§ 10.5. Взаимодействие элементов тока

Комбинируя определение магнитного поля (5) и закон Био – Савара (8), можно получить выражение для силы взаимодействия двух произвольно ориентированных элементов тока (аналогичное закону Кулона в электростатике). Выражение это оказывается, однако, довольно громоздким, ибо в него войдет двойное векторное произведение, которое заметно не упрощается. В то же время для анализа возникающих при таком взаимодействии нюансов нам достаточно рассмотреть его частный случай взаимно перпендикулярных элементов, один из которых лежит на оси другого (рис. 7).

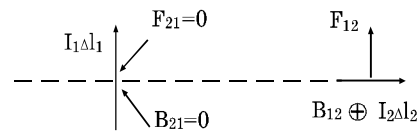


Рис. 7.

Поскольку элемент $I_1 \Delta l_1$ находится на оси элемента $I_2 \Delta l_2$, последний не возбуждает поле в месте нахождения первого и, следовательно, элемент $I_1 \Delta l_1$ никакой силы со стороны $I_2 \Delta l_2$ испытывать не будет ($F_{21} = 0$). Элемент же

$I_2 \Delta l_2$, напротив, лежит в перпендикулярной к току $I_1 \Delta l_1$ и пересекающей его плоскости, т. е. там, где его поле как раз максимально ($\sin \alpha = 1$). Индукция поля \mathbf{B}_{12} этого тока направлена на рис. 7 от нас, и элемент 2 будет испытывать силу \mathbf{F}_{12} , действующую вверх. Таким образом,

$$\mathbf{F}_{12} \neq -\mathbf{F}_{21}$$

и налицо явное нарушение третьего закона Ньютона. В чем же здесь дело?

Мы пришли к этому противоречию потому, что незаметно встали на точку зрения дальнего действия. Ведь перейдя к взаимодействию элементов друг с другом, мы исключили из рассмотрения весьма существенный физический объект – магнитное поле, а этого делать нельзя. В том, что тре-

тый закон Ньютона здесь не выполняется, ничего удивительного нет: ведь если рассматривать его в рамках дальнего действия (т. е. в формулировке, данной в § 2.3), то он в определенных ситуациях может и даже должен нарушаться. Рассмотренный пример этого нарушения является еще одной иллюстрацией²² несостоятельности теории дальнего действия.

Если же встать на точку зрения ближнего действия и включить в рассмотрение возбуждаемое токами магнитное поле, то полученное противоречие может быть устранено. С точки зрения ближнего действия элемент $I_2\Delta l_2$ взаимодействует не с элементом $I_1\Delta l_1$, а с его полем. «Ощущая» со стороны этого поля силу F_{12} , он, в свою очередь, образно говоря, сам «действует на него» с равной и противоположной силой «отдачи», что проявляется в изменении импульса поля²³. Можно строго показать, что при любых взаимодействиях зарядов и токов полный (т. е. механический и электромагнитный) импульс замкнутой системы сохраняется. Поскольку закон сохранения импульса полностью эквивалентен третьему закону Ньютона (в его обобщенной форме, включая в рассмотрение поле), то этим и устраняется указанное противоречие.

А если взаимодействуют два *замкнутых* постоянных тока? И электрическое, и магнитное поля таких токов стационарны, т. е. со временем не меняются. Не может измениться, следовательно, и электромагнитный импульс этого поля. Тем не менее, и в этом случае третий закон выполняется, только применять его надо уже не к отдельным элементам тока, а в целом к контурам. Ведь как уже отмечалось, в этом случае экспериментально невозможно из результирующего поля каждого контура выделить вклады отдельных его элементов, а потому опытной проверке подлежит лишь силовое воздействие на токи этого суммарного поля. Расчеты же показывают, что для двух произвольных контуров суммирование сил попарного взаимодействия их элементов (полученных из (5) и (8)) всегда дает результирующие силы, удовлетворяющие третьему закону Ньютона. Таким образом, отмеченное кажущееся противоречие не опровергает, а лишь раз подтверждает описанный нами механизм магнитного взаимодействия токов.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется векторным произведением векторов. Коммутативно

²² См. по этому поводу также третью сноску к § 8.3.

²³ В этом случае поле является электромагнитным и не статическим, ибо мы рассматриваем два изолированных элемента тока (не входящие в замкнутые цепи), которые создают вокруг себя меняющиеся со временем электрическое и магнитное поля. Такое поле обладает определенным тоже меняющимся импульсом, задаваемым значениями \mathbf{E} и \mathbf{B} в каждой точке.

ли оно?

2. Дать определение вектора индукции магнитного поля. Почему его определение через момент сил, действующих на рамку с током, не вполне корректно?

3. Дать название и определение единицы магнитного поля.

4. Сформулировать правило левой руки.

5. Можно ли в рамках магнитостатики экспериментально определить силу, испытываемую малым элементом постоянного тока? Если да, то как именно, если нет – почему?

6. Сформулировать закон Био – Савара. Как меняется поле малого элемента тока при удалении от него по разным направлениям точки наблюдения? Что представляет собой линия \mathbf{B} элемента тока?

7. Можно ли в рамках магнитостатики экспериментально определить поле, созданное малым элементом постоянного тока? Если да, то как именно, если нет – почему?

8. Сформулировать принцип суперпозиции полей в магнитостатике.

9. Каким требованиям должен удовлетворять «пробный» элемент тока?

10. Найти поле в центре кругового тока.

11. Удовлетворяют ли третьему закону Ньютона силы взаимодействия двух элементов тока? Двух замкнутых постоянных токов?

Лекция 17

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИКИ

Для магнитного поля постоянных токов могут быть получены уравнения, аналогичные электростатическим (7л11). Уравнения эти выводятся из закона Био – Савара и принципа суперпозиции (и в свою очередь влекут за собой их выполнение). Поскольку, однако, закон Био – Савара существенно сложнее своего электростатического аналога, вывод уравнений магнитостатики выходит за пределы того математического аппарата, которым мы владеем. Нам под силу оказывается лишь доказательство одного из них, и то для частного случая прямых бесконечных токов.

§ 10.6. Теорема о циркуляции

1. Поле прямого тока. Рассмотрим прямой бесконечный провод, несущий постоянный линейный ток I (рис. 1), и найдем поле \mathbf{B} в произвольной точке M на расстоянии a от него. Для этого разобьем провод на малые элементы $\Delta l_i \ll a$, посчитаем вклад каждого из них и результаты просуммируем. В соответствии с законом Био – Савара поле $\Delta \mathbf{B}_i$ отрезка Δl_i изображенного на рис. 1, будет направлено перпендикулярно плоскости чертежа на нас, а величина его

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0 I \Delta l_i \sin \alpha_i}{4\pi R_i^2},$$

где R_i – расстояние от Δl_i до исследуемой точки поля, а α_i угол между Δl_i и R_i . По принципу суперпозиции полное поле \mathbf{B} направлено в ту же сторону, а величина его

$$B = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta B_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta l_i \sin \alpha_i}{R_i^2}, \quad (1)$$

где суммирование производится по всем элементам, на которые разбит наш ток.

Для вычисления входящей в (1) суммы рассмотрим аналогичную электростатическую задачу расчета поля бесконечной прямой нити (рис. 2) с равномерно распределенным по ней зарядом линейной плотности

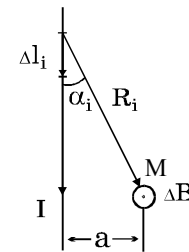


Рис. 1.

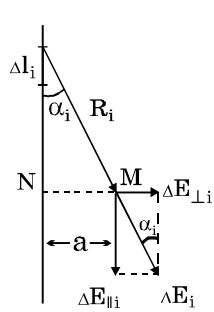


Рис. 2.

где Δq – заряд, находящийся на отрезке нити длиной Δl . Поле $\Delta \mathbf{E}_i$ в произвольной точке M на расстоянии a от нити, создаваемое ее участком Δl_i , будет направлено (для определенности полагаем $\xi > 0$) вдоль радиуса, проведенного из Δl_i в M . Однако вклад в общее поле будет давать только нормальная ее составляющая $\Delta E_{\perp i}$, ибо любому Δl_i найдется симметричный относительно точки N (отрезок MN перпендикулярен нити) участок (на рис. не показан), возбуждающий равное и противоположное $\Delta E_{\parallel i}$ поле. Таким образом, параллельные нити составляющие для всех ее отрезков попарно взаимно уничтожатся и полное поле \mathbf{E} будет направлено радиально (что, впрочем, очевидно и из соображений симметрии), а величина его

$$E = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta E_{\perp i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta E_i \sin \alpha_i = \frac{\xi}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta l_i}{R_i^2} \sin \alpha_i, \quad (2)$$

где $\xi \Delta l_i$ – заряд элемента нити Δl_i .

Теперь понятно, для чего мы прибегли к электростатическому аналогу нашей задачи: в (2) входит та же сумма, что и в (1)! Но сейчас мы легко можем ее найти, ведь поле \mathbf{E} без труда вычисляется с помощью теоремы Гаусса. Предоставляя эти вычисления провести читателю самостоятельно, напомним лишь их результат:

$$E = \frac{\xi}{2\pi\epsilon_0 a}. \quad (3)$$

Сравнивая (3) с (2), получаем

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta l_i}{R_i^2} \sin \alpha_i = \frac{2}{a},$$

что после подстановки в (1) дает

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (4)$$

Заметим, что это соотношение используется для определения единицы силы тока – ампера, которая является одной из основных в системе СИ. Если два длинных прямолинейных проводника с текущими в одном направлении одинаковыми токами I расположить параллельно друг другу на расстоянии a , то между ними, как нетрудно видеть, возникнет сила притя-

жения, величина которой в расчете на участок проводника длины Δl

$$F = I\Delta l B = I\Delta l \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \Delta l = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\Delta l}{a} I^2.$$

По определению $I = 1$ А, если при $a = 1$ м и $\Delta l = 1$ м, $F = 2 \cdot 10^{-7}$ Н, т. е. за единицу силы тока – ампер – принимается такой линейный ток, который действует на равный ему ток, расположенный на расстоянии 1 м, с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н, приходящейся на каждый метр длины проводника.

2. Циркуляция вектора \mathbf{B} . Найдем сначала циркуляцию вектора \mathbf{B} вдоль линии этого вектора, т. е. вычислим сумму $\sum B_{li} \Delta l_i$ ²⁴ вдоль окружности радиуса a :

$$\sum_{i=1}^n B_{li} \Delta l_i = \sum_{i=1}^n B_i \Delta l_i = B \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} 2\pi a = \mu_0 I.$$

Докажем, что такой же²⁵ будет циркуляция \mathbf{B} и при обходе по произвольной замкнутой кривой Γ , лежащей в перпендикулярной току плоскости и охватывающей его (рис. 3). Для этого проведем из точки M , в которой ток пронизывает плоскость, два луча под небольшим углом $\Delta\beta$ друг к другу. Лучи эти вырежут малый (практически прямолинейный) отрезок Δl кривой Γ , вклад которого в циркуляцию

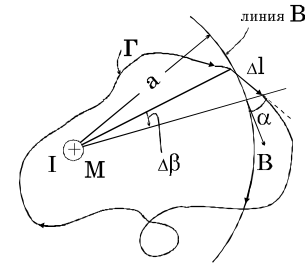


Рис. 3.

$$B_l \Delta l = B \Delta l \cos \alpha = \pm B \Delta l', \quad (5)$$

где α – угол между векторами Δl и \mathbf{B} , а $\Delta l'$ – ограниченный нашими лучами отрезок линии \mathbf{B} , проходящей через элемент Δl , причем в (5) нужно брать, очевидно, «+», если $\cos \alpha > 0$, и «–», если $\cos \alpha < 0$. Оба эти случая можно охватить одним выражением

$$\pm \Delta l' = a \Delta\beta,$$

если угол $\Delta\beta$ считать алгебраическим, т. е. положительным, когда $\cos \alpha > 0$, или проекция Δl на линию \mathbf{B} положительна, и отрицательным, когда эта проекция меньше нуля. В первом случае, очевидно, направления Δl и тока образуют правовинтовую систему, во втором – левовинтовую. Таким образом, с учетом (4),

²⁴ В случае электрического поля циркуляция вектора \mathbf{E} , как мы видели, представляет собой работу электрических сил вдоль замкнутого контура, отнесенную к величине заряда. В магнитном поле такого ясного физического содержания циркуляция не имеет.

²⁵ С точностью до знака.

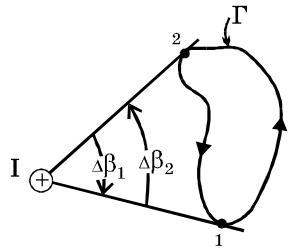


Рис. 4.

замкнутой кривой Γ , получим

$$\sum_{\Gamma} B_{li} \Delta l_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_i \Delta \beta_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \beta,$$

где β – полный угол, под которым видна из M вся кривая Γ . Если она не охватывает тока (рис. 4), то, очевидно, $\beta = 0$, ибо кривая эта разделится точками 1 и 2 на две части, дающие в циркуляцию противоположные вклады. Если же она охватывает ток один раз²⁶ (см. рис. 3), то $\beta = \pm 2\pi$ ²⁷ (в зависимости от произвольно выбранного направления обхода Γ) и

$$\sum_{\Gamma} B_{li} \Delta l_i = \mu_0 I, \quad (7)$$

причем знак β можно приписать току I , считая его положительным, если он образует с направлением обхода Γ праввинтовую систему, и отрица-

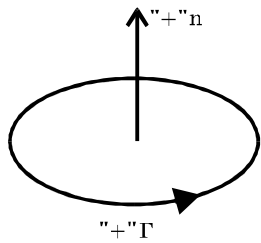


Рис. 5.

тельным в противном случае. Поскольку по определению тока его знак связан с выбором положительной нормали \mathbf{n} к поверхности, через которую он протекает, это правило фактически устанавливает связь между произвольно выбранным (положительным) направлением обхода контура и направлением положительной нормали к поверхности, опирающейся на этот контур. Эти направления, гласит правило, образуют праввинтовую систему (рис. 5). Во всем дальнейшем изложении мы будем его

придерживаться.

Итак, циркуляция \mathbf{B} вдоль любой кривой, лежащей в перпендикулярной к току плоскости и охватывающей его, определяется формулой (7).

²⁶ Случай, когда контур Γ охватывает ток несколько раз, физического интереса не представляет и нами рассматриваться не будет (хотя он без труда рассчитывается).

²⁷ Наличие замкнутых петель на контуре Γ , не охватывающих ток (см. рис. 3), очевидно, не влияет на результат, поскольку циркуляция \mathbf{B} по каждой такой петле равна нулю.

$$B_l \Delta l = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta \beta, \quad (6)$$

т. е. вклад отрезка Δl в циркуляцию не зависит от его расстояния до тока, а определяется, помимо величины I , лишь (положительным или отрицательным) углом $\Delta \beta$, под которым виден этот отрезок из точки пересечения тока с плоскостью.

Суммируя выражения типа (6) для всей

Нетрудно видеть, что эта формула остается справедливой и для кривой, не лежащей в указанной плоскости. В самом деле, раскладывая произвольный отрезок Δl этой кривой (рис. 6) на параллельную Δl_{\parallel} и перпендикулярную Δl_{\perp} току составляющие и записывая его вклад в циркуляцию, получим

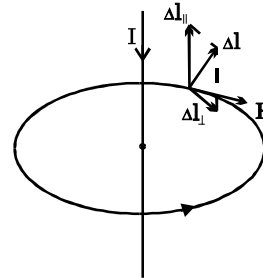


Рис. 6.

$$(\mathbf{B}, \Delta l) = (\mathbf{B}, \Delta l_{\parallel} + \Delta l_{\perp}) = (\mathbf{B}, \Delta l_{\parallel}) + (\mathbf{B}, \Delta l_{\perp}).$$

Но $(\mathbf{B}, \Delta l_{\parallel}) = 0$, ибо векторы \mathbf{B} и Δl_{\parallel} перпендикулярны, так что вклад в циркуляцию даст только составляющая Δl_{\perp} , численно равная проекции вектора Δl на перпендикулярную току плоскость. Таким образом, расчет циркуляции \mathbf{B} по произвольному контуру сводится к ее вычислению вдоль проекции этого контура на перпендикулярную плоскость (ибо индукция \mathbf{B} от «высоты» не зависит), которое, как мы видели, дает формулу (7).

Используя принцип суперпозиции, легко обобщить доказанное утверждение на случай любого числа n *прямых бесконечных* токов, пронизывающих данный контур Γ . Тогда

Используя принцип суперпозиции, легко обобщить доказанное утверждение на случай любого числа n *прямых бесконечных* токов, пронизывающих данный контур Γ . Тогда

$$\sum_{\Gamma} B_{li} \Delta l_i = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (8)$$

где направление обхода контура выбирается произвольно, а знаки токов – по установленному нами правилу правого винта.

Соотношение (8) выражает так называемую теорему о циркуляции. Можно показать, что она справедлива в самом общем случае произвольных токов, пересекающих

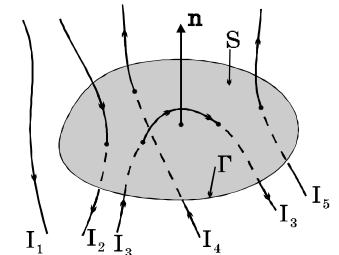


Рис. 7.

поверхность, опирающуюся на данный замкнутый контур Γ^{28} (рис. 7). Задавая направление обхода Γ и получая из него ориентацию положительной нормали \mathbf{n} , легко найти знаки входящих в (8) токов. На рис. 7, например, ток I_1 вклада в циркуляцию не дает, токи I_4 и I_5 считаются положительными, ток I_2 – отрицательным, а ток I_3 пересекает поверхность дважды: один раз в направлении \mathbf{n} , другой – навстречу ему. Поэтому и в сумму токов (8) он войдет дважды, причем с разными знаками, и, стало быть, вклада в циркуляцию тоже не даст. Понятно, что если выбрать на рис. 7 поверхность S сильно выпуклой вверх, то ток I_3 вовсе ее не «зацепит».

²⁸ В том числе и тогда, когда контур Γ находится внутри проводящей среды, по которой течет непрерывно распределенный постоянный ток. Такие случаи, однако, мы в настоящей лекции не рассматриваем.

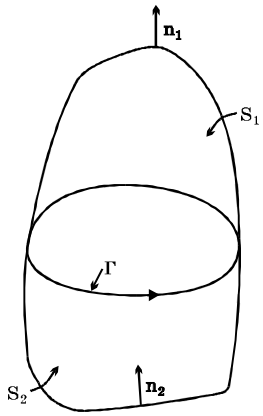


Рис. 8.

Но, может быть, при деформации S появятся новые токи, пронизывающие ее, или исчезнет часть старых и, таким образом, изменится правая часть (8)? Нетрудно видеть, однако, что этого не произойдет и правая часть (8) от выбора S не зависит. Для доказательства рассмотрим две произвольные поверхности S_1 и S_2 , опирающиеся на заданный контур Γ (рис. 8). Они образуют, очевидно, одну замкнутую поверхность S_Σ , поток вектора \mathbf{j} через которую по условию стационарности токов (18л14) равен нулю. Применительно к нашему случаю линейных токов это и означает, что алгебраическая сумма токов, втекающих в S_Σ через поверхность S_2 , т. е. пересекающих ее в направлении \mathbf{n}_2 (связанным с направлением обхода Γ правилом правого винта), равна сумме токов, вытекающих из нее через поверхность S_1 (в направлении \mathbf{n}_1).

Можно сформулировать теорему о циркуляции, вообще не прибегая к поверхности S . Действительно, в силу замкнутости постоянных токов их можно разбить на 2 класса (см. рис. 9, где изображены также токи, текущие из бесконечности в бесконечность): сцепленные, как звенья цепи, с данным контуром (типа I_4 и I_2) и не сцепленные с ним (типа I_3 и I_1). Очевидно, первые будут давать вклад в циркуляцию \mathbf{V} вдоль Γ , вторые – нет. Таким образом, можно сказать, что *циркуляция вектора \mathbf{V} вдоль любого замкнутого контура Γ равна (умноженной на μ_0) алгебраической сумме токов, сцепленных с данным контуром*. При этом положительными считаются токи, образующие с направлением обхода Γ правовинтовую систему, а отрицательными – систему левовинтовую.

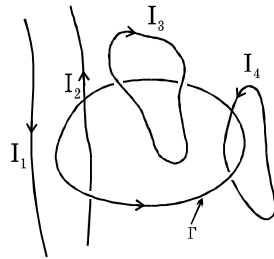


Рис. 9.

§ 10.7. Полная система уравнений магнитостатики. Теорема единственности

Теорема о циркуляции является одним из основных уравнений магнитостатики. Для образования полной системы к ней нужно добавить еще одно уравнение, которое ввиду сложности его вывода мы приводим без доказательства. Оно утверждает, что поток вектора \mathbf{V} через любую замкнутую поверхность S всегда равен нулю:

$$\sum_S B_{ni} \Delta S_i = 0. \quad (9)$$

Можно показать, что система уравнений (8) и (9) полностью эквивалентна закону Био – Савара и принципу суперпозиции, т.е. из одной пары этих утверждений следует другая, и наоборот. Отсюда вытекает, что, во-первых, уравнения (8) и (9) составляют полную систему уравнений магнитостатики, т.е. всякое магнитное поле постоянных токов обязано им удовлетворять и, наоборот, любое поле, удовлетворяющее этим уравнениям во всем пространстве, является магнитостатическим, т.е. может быть создано каким-то образом распределенными постоянными токами. Во-вторых, справедлива следующая теорема единственности²⁹: если известно распределение токов, то однозначно определяется возбуждаемое ими магнитное поле \mathbf{B} , и обратно, задание \mathbf{B} влечет за собой единственно возможное распределение токов³⁰. Действительно, процедура вычисления поля данных токов по закону Био – Савара и принципу суперпозиции однозначна, причем поле это в силу отмеченной эквивалентности утверждений удовлетворяет уравнениям (8) и (9). С другой стороны, если заданное поле везде удовлетворяет этим уравнениям, то, используя лишь первое из них, можно найти распределение токов, создающих его (ведь по (8) для знания тока, текущего через произвольную маленькую петельку Γ , достаточно найти циркуляцию вдоль нее вектора \mathbf{B}). Поскольку и эта операция является однозначной, отсюда следует единственность распределения токов.

Итак, для анализа стационарного магнитного поля можно пользоваться либо законом Био – Савара и принципом суперпозиции, либо полной системой уравнений (8) и (9). Последняя может оказаться весьма полезной в случаях особой симметрии распределения токов, позволяя сразу найти поле \mathbf{B} , минуя громоздкие вычисления с привлечением закона Био – Савара. Кроме того, если решение задачи угадано из других соображений, она дает возможность проверить его верность и утверждать единственность. Наконец – и в этом главная ее ценность, – система эта может быть преобразована к дифференциальной форме, в которую входят характеристики, относящиеся к одной и той же точке пространства. Эта форма является незаменимой для теоретического исследования магнитных полей³¹.

Сейчас мы используем эту систему для сравнительного анализа магнитного и электрического статических полей. Выпишем основные уравне-

²⁹ Часто второе утверждение включает и первое, т.е. под полнотой понимают и единственность.

³⁰ В такой формулировке эта теорема не вполне аналогична теореме единственности в электростатике (см. лекцию 11), ибо там задавалось не распределение заряда σ , а потенциалы (или заряды) проводников, на которых *устанавливалось* какое-то σ , и доказывалась единственность не только образованного им поля, но и самого этого распределения, т.е. рассматривалась более сложная задача.

³¹ Ср. все сказанное по этому поводу об электростатическом поле в лекции 11.

ния электро- и магнитостатики

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\Gamma} E_{li} \Delta l_i = 0, \\ \sum_S E_{ni} \Delta S_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^n q_k, \end{aligned} \right\} \text{(A)} \quad \left. \begin{aligned} \sum_{\Gamma} B_{li} \Delta l_i = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \\ \sum_S B_{ni} \Delta S_i = 0, \end{aligned} \right\} \text{(B)} \quad (10)$$

справедливые соответственно для любого замкнутого контура Γ и любой замкнутой поверхности S . Общим между этими уравнениями является то, что в левые их части входят одинаковые комбинации – циркуляция вектора вдоль кривой и поток его через поверхность. Значит, и электрическое, и магнитное поля «устроены» таким образом, что однозначно определяются заданием этих комбинаций в любой области пространства, причем последние связаны лишь с распределением зарядов или токов. Там, где нет ни тех, ни других, уравнения для \mathbf{E} и \mathbf{B} становятся одинаковыми, а значит, поля эти совпадают по всем своим свойствам.

Однако в областях, занятых зарядами или токами, поля оказываются существенно различными, и различия эти определяются разницей правых частей уравнений систем (A) и (B). Из первого уравнения (B) следует, что магнитное поле, в отличие от электрического, является полем непотенциальным: в нем существуют контуры (охватывающие токи), циркуляция по которым не равна нулю. Отсюда вытекает принципиальная возможность существования замкнутых линий индукции, которая для линий \mathbf{E} запрещалась первым уравнением (A) (такие линии, например, имеет поле прямого тока). Но может быть, наряду с замкнутыми линиями \mathbf{B} существуют и незамкнутые, обрывающиеся в каких-то точках пространства (например там, где текут токи)? Первому уравнению (B) такая возможность не противоречит. Однако второе уравнение (B) утверждает, что таких линий не существует. Линии индукции не имеют истоков, т. е. точек, где они могли бы начинаться или кончаться³². Ведь в противном случае, окружая такую точку замкнутой поверхностью, мы пришли бы к нарушению второго уравнения (B), ибо число входящих в эту поверхность линий не равнялось бы числу выходящих и поток через нее был бы отличен от нуля. Стало быть, линии индукции магнитного поля могут быть либо замкнутыми, либо двумя концами уходить в бесконечность³³. Такие поля называются вихревыми в про-

³² Разумеется, при условии (которое мы считаем выполненным), что линии эти проводятся так, чтобы густота их была пропорциональна B . Тогда (как мы видели в лекции 11) число линий, пересекающих какую-либо поверхность, пропорционально потоку соответствующего вектора через эту поверхность.

³³ Существует еще одна возможность: линия \mathbf{B} , непрерывно извиваясь, может бесконечно продолжаться, оставаясь все время внутри некоторого ограниченного объема. Поскольку линия эта «толщины» не имеет, она никогда не заполнит этот объем и нигде не оборвется. Такие линии не противоречат системе (10 B) и, в отличие от электрических, действительно существуют (ср. со сказанным о линиях \mathbf{E} в последней сноске к § 8.11). Подобные ситуа-

твояположность потенциальным, представителем которых является электростатическое поле.

Пример. В качестве иллюстрации применения основных уравнений (10 В) найдем поле «бесконечного» соленоида. Под «бесконечным» соленоидом понимается длинный круговой цилиндр, на поверхности которого намотан по винтовой линии с малым шагом проводник. Если длина цилиндра много больше его диаметра, который, в свою очередь, намного превосходит шаг винтовой линии, то систему можно считать однородной вдоль оси цилиндра (пока мы находимся далеко от его концов), а виток провода – перпендикулярной этой оси окружностью, т. е. система оказывается еще и аксиально-симметричной (рис. 10). Отсюда следует, что каждая из трех составляющих \mathbf{B}_r , \mathbf{B}_τ и \mathbf{B}_z поля может зависеть лишь от одной координаты – расстояния r от оси соленоида.

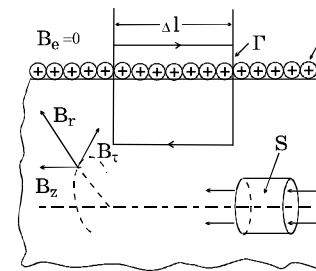


Рис. 10.

задачи вытекает, что вектор \mathbf{B}_r всюду на боковой поверхности направлен наружу или внутрь, а потому поток через нее может быть равным нулю лишь при условии $B_r = 0$.

Далее, $B_z = 0$ по теореме о циркуляции. Выбирая перпендикулярную оси цилиндра окружность с центром на его оси и используя аксиальную симметрию задачи, нетрудно видеть, что циркуляция \mathbf{B} вдоль этой окружности, не имеющей сцепленных с ней токов, равна нулю лишь при условии $B_z = 0$.

Для определения B_τ проведем плоский замкнутый прямоугольный контур Γ , стороны которого попарно параллельны и перпендикулярны оси цилиндра и пересекают обмотку соленоида. Найдем циркуляцию \mathbf{B} вдоль этого контура, связав положительное направление его обхода с направлением тока I правилом правого винта. Учитывая, что вертикальные стороны Γ вкладывают в циркуляцию не дают (ибо $B_r = 0$), получим

ции, однако, мы рассматривать не будем как редко встречающиеся и не представляющие практического интереса.

³⁴ Соображения симметрии с равным правом, очевидно, применимы к пространствам как внутри, так и снаружи соленоида.

$$B_z^{in} \Delta l - B_z^{ex} \Delta l = (B_z^{in} - B_z^{ex}) \Delta l = \mu_0 n I \Delta l,$$

где B_z^{in} и B_z^{ex} – z -проекции поля соответственно внутри и снаружи соленоида на горизонтальных участках Γ , n – число витков на единицу его длины, а Δl – длина продольной стороны контура. Отсюда разность

$$B_z^{in} - B_z^{ex} = \mu_0 n I \quad (11)$$

и не зависит от высоты прямоугольника Γ . Устремляя эту высоту к бесконечности, получим, что поле B_z^{ex} сохраняет какое-то постоянное значение при удалении от соленоида на сколь угодно большие расстояния. Но представляя это поле как суперпозицию полей отдельных витков, нетрудно видеть, что оно должно убывать при удалении от соленоида, ибо поле каждого витка согласно закону Био – Савара спадает с расстоянием r до него не медленнее, чем $1/r^2$ (расчеты показывают даже, что при больших r оно $\sim 1/r^3$). Следовательно, постоянное значение B_z^{ex} может быть только нулевым, т. е. поле снаружи соленоида *везде* равно нулю. Отсюда из (11) сразу получаем

$$B_z^{in} = \mu_0 n I.$$

Таким образом, поле внутри соленоида однородно, направлено вдоль оси, составляет с направлением тока правовинтовую систему и по величине

$$B = \mu_0 n I, \quad (12)$$

а снаружи равно нулю³⁵.

§ 10.8. Сила Лоренца

Выражение (5л16) для силы, испытываемой проводником с током в магнитном поле, положенное в основу определения \mathbf{B} , может быть преобразовано к виду, позволяющему понять механизм ее появления. Для этого

³⁵ Утверждение о стремлении к нулю поля *бесконечного* соленоида при удалении от него нуждается в более убедительной аргументации, поскольку число его витков бесконечно велико. Понятно, что основной вклад в поле в любой точке M , расположенной снаружи соленоида, будет давать его отрезок *конечной* длины, видимый из этой точки под близком к π углом φ . Если этот угол разбить на малые части $\Delta\varphi$, то при удалении точки M от соленоида и фиксированных $\Delta\varphi$ внутрь каждого из них будет попадать все большее число витков, создающих в M неизменное *по направлению* поле $\Delta\mathbf{B}_i$ (сохраняется подобие). Поскольку, однако, ΔN растет пропорционально расстоянию r точки M от соленоида, а поле каждого витка по величине спадает не медленнее, чем $1/r^2$, вклад в поле i -го участка соленоида, соответствующего углу $\Delta\varphi$, будет уменьшаться, причём не медленнее, чем $1/r$. Стало быть, не медленнее, чем $1/r$, будет спадать и суммарное поле всех таких участков (ср. вышесказанное с рассуждениями, приводимыми в § 8.5 при обсуждении электрического поля бесконечной заряженной плоскости. Ситуации здесь и там оказываются разными, ибо соленоид – система, бесконечная в одном измерении, а плоскость – в двух).

рассмотрим отрезок цилиндрического проводника длины Δl и сечения S с квазилинейным током I и напомним цепочку очевидных равенств

$$\mathbf{F} = I[\Delta l, \mathbf{B}] = [I\Delta l, \mathbf{B}] = [jS\Delta l, \mathbf{B}] = S\Delta l[\mathbf{j}, \mathbf{B}], \quad (13)$$

где \mathbf{j} – плотность тока, параллельная, очевидно, Δl (из определения векторного произведения следует, что скаляр можно вносить под его знак и выносить оттуда). Но плотность тока \mathbf{j} выражается через концентрацию носителей n , их заряд q и среднюю скорость упорядоченного движения \mathbf{u} :

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{u}^{36}, \quad (14)$$

что после подстановки в (13) дает

$$\mathbf{F} = S\Delta lqn[\mathbf{u}, \mathbf{B}] = Nq[\mathbf{u}, \mathbf{B}], \quad (15)$$

где N – число движущихся частиц в объеме проводника $S\Delta l$. Таким образом, сила \mathbf{F} , испытываемая отрезком проводника с током, оказывается пропорциональной числу движущихся в нем зарядов. Совершенно естественно предположить, что она приложена именно к этим движущимся зарядам, равномерно распределяясь между ними. За счет столкновений их с неподвижными ионами она «передается» последним и с макроскопической точки зрения воспринимается как сила, действующая на весь проводник. Из сделанного предположения следует, что на каждый движущийся заряд действует сила

$$\mathbf{F}_j = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (16)$$

где \mathbf{v} – истинная скорость заряда (включая и тепловую): ведь тепловые скорости благодаря своей хаотичности вклада в (15) все равно не дадут.

Опыты, проведенные со свободно движущимися зарядами (например с электронными или ионными пучками), позволяющие непосредственно определить испытываемую ими силу, подтверждают верность формулы (16), причем она остается справедливой не только в постоянном, но и в переменном магнитных полях. Сила, определяемая выражением (16), называется силой Лоренца³⁷.

Как видно из (16), сила Лоренца перпендикулярна скорости заряда

³⁶ Через перпендикулярную скорости \mathbf{u} площадку ΔS за время Δt пройдут все частицы, находящиеся внутри цилиндра с основанием ΔS и высотой $u\Delta t$. Они перенесут заряд $\Delta Q = qn\Delta S u\Delta t$ откуда для плотности тока $j = \frac{\Delta Q}{\Delta S\Delta t}$ получается выражение (14).

³⁷ Часто силой Лоренца называют полную силу, испытываемую движущимся зарядом со стороны магнитного и электрического полей, т. е. прибавляют к правой части (16) еще силу $q\mathbf{E}$. Мы сохраним это название лишь за ее магнитной частью.

(и индукции магнитного поля), а потому работа ее над движущейся частицей всегда равна нулю. Таким образом, *магнитное поле не может разогнать или затормозить эту частицу, а способно лишь искривить ее траекторию*³⁸.

Пример. Электрон «встреливается» в однородное магнитное поле \mathbf{B} перпендикулярно линиям индукции. Описать его движение.

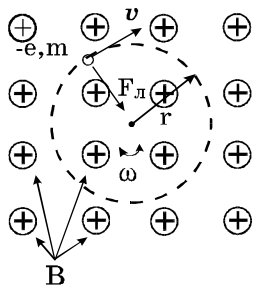


Рис. 11.

Так как начальная скорость электрона $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, то движение его будет происходить в перпендикулярной полю плоскости (рис. 11). Действительно, сила Лоренца всегда перпендикулярна полю, а потому продольная ее составляющая равна нулю. Не может появиться, следовательно, и продольная составляющая скорости. Далее, так как в магнитном поле всегда $v = const$ и $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, то $F_L = qvB = const$.

Таким образом, электрон будет двигаться с постоянной по модулю скоростью под действием постоянной по величине силы, перпендикулярной скорости. Это – движение по окружности. Записывая второй закон Ньютона для этого движения, получим

$$m \frac{v^2}{r} = evB,$$

или

$$m\omega^2 r = e\omega r B,$$

где r – радиус окружности, а ω – угловая скорость (круговая, или так называемая циклотронная, частота вращения). Из второго соотношения следует, что циклотронная частота вращения электрона

$$\omega = \frac{e}{m} B$$

определяется лишь величиной магнитного поля и не зависит от скорости электрона³⁹. Из первого равенства радиус вращения

$$r = \frac{m v}{e B}$$

и увеличивается с ростом v . Отметим, что на постоянстве цикло-

³⁸ Это обстоятельство не противоречит принципу действия электродвигателя, где движение проводника с током в магнитном поле сопровождается совершением механической работы. Такое движение не эквивалентно перемещению свободных зарядов, и на него накладываются возникающие здесь явления электромагнитной индукции (см. следующую лекцию).

³⁹ При условии, конечно, что $v \ll c$ и $m = const$.

тронной частоты основана работа одного из типов ускорителей частиц – циклотрона.

Контрольные вопросы и задания

1. Найти поле прямого бесконечного тока.
2. Дать определение ампера.
3. Что такое циркуляция вектора вдоль какой-либо замкнутой кривой? Это вектор или скаляр? Арифметическая или алгебраическая величина?
4. Найти циркуляцию вектора \mathbf{B} , созданного прямым бесконечным током, вдоль замкнутого контура, лежащего в перпендикулярной току плоскости.
5. Показать, что циркуляция поля прямого тока вдоль произвольной кривой равна циркуляции вдоль проекции этой кривой на перпендикулярную току плоскость.
6. Сформулировать теорему о циркуляции. Как определяются знаки фигурирующих в ней токов?
7. Показать, что сумма постоянных токов, пронизывающих поверхность, опирающуюся на какой-либо замкнутый контур, не зависит от формы этой поверхности.
8. Написать полную систему уравнений магнитостатики. Что означает её полнота? Каким двум фундаментальным утверждениям она полностью эквивалентна?
9. Сформулировать магнитостатическую теорему единственности. Сравнить её с электростатической аналогичной теоремой.
10. Доказать, что магнитные линии не имеют истоков.
11. Сравнить кулоновское и магнитостатическое поля в областях пространства, свободных от зарядов и токов.
12. То же для областей, занятых (не целиком) зарядами и токами.
13. Показать, что магнитное поле длинного соленоида не имеет радиальных и «круговых» составляющих.
14. Найти поле соленоида внутри и снаружи.
15. Исходя из определения магнитного поля, получить выражение для силы Лоренца. Показать, что сила Лоренца не может разогнать или затормозить частицу.
16. Описать движение электрона, который «встреливается» в однородное магнитное поле перпендикулярно его линиям.

Лекция 18

ГЛАВА 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

До сих пор мы рассматривали статические, т. е. не меняющиеся во времени электрические и магнитные поля. Они создавались соответственно неподвижными зарядами и постоянными токами. А что произойдет, если заряды начнут двигаться, а токи меняться? Естественно считать, что если изменения и перемещения эти происходят достаточно плавно, то поля останутся статическими, соответствующими распределению зарядов и токов в данный момент времени, и будут медленно меняться вместе с ними. Фактически мы уже сталкивались с подобной ситуацией, когда считали, например, взаимную энергию зарядов и рассматривали работу кулоновых сил при их удалении друг от друга на бесконечность (см. лекцию 12).

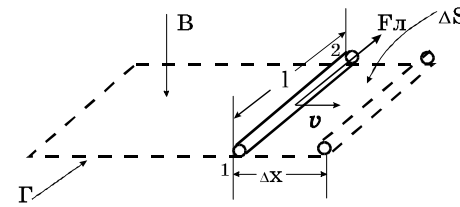
Однако при таких изменениях положений или величин зарядов и токов и возбуждаемых ими полей могут возникнуть принципиально новые эффекты, обязанные своим происхождением именно этим изменениям и не имеющие место в статике. Эффекты эти должны, очевидно, зависеть от *производных* (исчезающих в статике) соответствующих величин по времени и проявляться тем сильнее, чем больше эти производные. Эксперимент показывает, что такие эффекты действительно возникают. К изучению одного из них, называемого явлением электромагнитной индукции, мы сейчас и переходим⁴⁰.

§ 11.1. ЭДС индукции в движущихся проводниках

Используя определение магнитного поля (5л16) и сводя магнитную силу, действующую на проводник с током, к силам, испытываемым движущимися в нем зарядами, мы получили выражение для силы Лоренца (16л17). Согласно данному нами в лекции 15 определению, сила эта является сторонней (ибо она некулоновская) и должна возникать не только при движении зарядов внутри проводника (т. е. при наличии в нем тока), но и при любых перемещениях самого проводника в магнитном поле (так как при этом движутся и находящиеся в нем заряды). Следовательно, на различных участках такого проводника, вообще говоря, появляются сторонние электродвижущие силы, могущие вызывать электрический ток. Силы эти называются индукционными; для их расчета рассмотрим следующую простейшую схему.

⁴⁰ Аналогичное явление, вызванное изменением электрического поля, будет рассмотрено позже, в разделе «Электромагнитные волны».

Пусть прямолинейный отрезок цилиндрического проводника l перемещается в однородном магнитном поле \mathbf{B} и пусть его скорость \mathbf{v} перпендикулярна \mathbf{B} и оси проводника (рис. 1). На положительные заряды q внутри будет, очевидно, действовать сила Лоренца, величина которой



$F_L = qvB$, (1)

Рис. 1.

а направление показано на рисунке. На отрицательные заряды сила F_L будет действовать в противоположном направлении. Возникающая на участке l ЭДС по определению

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{1}{q} A_{12} = \frac{1}{q} F_L l = vBl \quad (2)$$

и направлена⁴¹ для зарядов обоих знаков вдоль изображенной на рис. 1 F_L .

Если представить себе, что отрезок l проводника является частью замкнутой квазилинейной цепи, контур которой изображен на рис. 1 пунктиром, то полученному результату может быть придана следующая форма.

Поскольку $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$,

$$vBl = B \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x l}{\Delta t} = B \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3)$$

где $\Delta S = l\Delta x$ – увеличение площади контура, а $\Delta\Phi = \Delta(BS)$ – потока вектора \mathbf{B} через него за время Δt . Так как остальные участки Γ неподвижны, в них не появляются сторонние силы и, следовательно, полная ЭДС \mathcal{E} , действующая вдоль всего контура, также определяется выражением (2). Из рис. 1 видно, что она составляет с направлением \mathbf{B} левовинтовую систему. Таким образом, можно написать, что

$$-\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4)$$

причем знак минус соответствует установленному нами в предыдущей

⁴¹ ЭДС есть скаляр (работа, деленная на заряд) и направления не имеет. Здесь имеется в виду направление оси, вдоль которой ЭДС положительна. В дальнейшем мы иногда будем применять подобные нестрогие выражения, ибо они вполне понятны и отличаются лаконичностью.

лекции правилу, связывающему положительное направление обхода контура и положительную нормаль к нему посредством *правого* винта.

Можно показать, что соотношение (4) справедливо в самом общем случае произвольного движения (включая деформацию) контура в *стационарном* магнитном поле. Оно выражает собой так называемый закон индукции токов в движущихся проводниках: *возникающая в контуре ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока через контур и составляет с ним (т. е. с изменением) не право- (это означал бы знак «плюс» в (4)), а левовинтовую систему*⁴².

Замечание 1. В законе индукции (4) речь идет о потоке вектора \mathbf{B} через замкнутый контур Γ , хотя имеется в виду, конечно, поток его через какую-либо поверхность, опирающуюся на этот контур (ведь именно через поверхность и определяется поток любого вектора). Нетрудно видеть, что произвол в выборе этой поверхности не скажется на величине Φ . Действительно, натягивая на контур Γ две произвольные поверхности S_1 и S_2 , мы получим замкнутую поверхность S_Σ , поток вектора \mathbf{B} через которую согласно уравнению (9л17) равен нулю. Это значит, что потоки через S_1 и S_2 равны и противоположны, причем по смыслу (9л17) нормали к S_1 и S_2 при этом должны быть направлены наружу, т. е. одна из них образует с направлением обхода Γ правовинтовую, а другая – левовинтовую системы. Меняя направление последней на противоположное (а вместе с ней и знак

соответствующего Φ), получаем независимость потока, входящего в (4), от выбора поверхности S ⁴³.

Замечание 2. При выводе формулы (2) предполагалось, что движущийся в магнитном поле отрезок проводника замкнутой цепи не образует, т. е. в нем ток не течет, хотя полученный в результате ее обобщения закон (4) относится именно к замкнутому проводящему контуру. Посмотрим, к каким эффектам приведет появление тока в рассматриваемом проводнике (рис. 2). Возникновение скорости \mathbf{u} упорядоченного движения носителей, направленной вдоль оси проводника, вызовет поворот на некоторый угол α

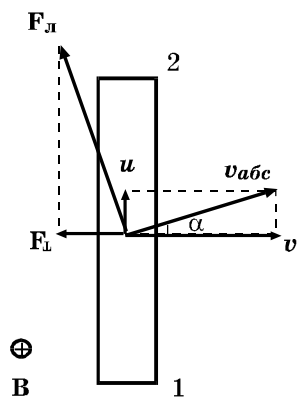


Рис. 2.

⁴² Точнее, левовинтовую систему ЭДС должна составлять с направлением нормали (ведь Φ и $d\Phi$ – тоже скаляры!), проведенной таким образом, чтобы $d\Phi$ было положительным (см. предыдущую сноску).

⁴³ Ср. подобные рассуждения, приведенные в предыдущей лекции при обсуждении теоремы о циркуляции. Аналогия здесь полная, ибо как линии \mathbf{j} , так и линии \mathbf{B} не имеют истоков.

абсолютной скорости \mathbf{v}_{abc} зарядов относительно направления движения проводника (т. е. \mathbf{v}). При этом сила Лоренца \mathbf{F}_L оставаясь всегда перпендикулярной \mathbf{v}_{abc} , тоже повернется на угол α относительно оси проводника. Однако величина продольной ее составляющей, создающей ЭДС \mathcal{E}_{12}

$$F_{\parallel} = F_L \cos \alpha = qv_{abc} B \cos \alpha = qBv$$

по-прежнему будет определяться формулой (1), так что выражения (2) – (4) останутся справедливыми. Поперечная же составляющая, равная по величине

$$F_{\perp} = F_L \sin \alpha = qv_{abc} B \sin \alpha = qBv_i,$$

очевидно, представляет собой силу, направленную *навстречу* движению проводника⁴⁴. На преодоление этой силы (просуммированной по всем движущимся зарядам внутри объема данного проводника) и затрачивается внешняя работа, необходимая для его перемещения в магнитном поле.

Обратив порядок рассуждений, приведенных в предыдущей лекции при выводе соотношения (15л17), получим для этой суммарной силы $F_{\perp\Sigma}$ известное выражение (5л16), откуда развиваемая ей механическая мощность

$$P'_{\text{мех}} = -F_{\perp\Sigma} v = -IBlv.$$

Мощность же сторонних сил, определяемых продольной составляющей F_{\parallel} , на участке 1–2 проводника в соответствии с (2)

$$P_{\text{стр}} = \mathcal{E}_{12} I = vBI$$

и оказывается равной $-P'_{\text{мех}}$. Таким образом,

$$P'_{\text{мех}} + P_{\text{стр}} = 0,$$

т. е. полная работа сил магнитного поля (как уже отмечалось ранее) равна нулю. Для поддержания движения проводника внешняя сила, уравнивающая $F_{\perp\Sigma}$, должна, очевидно, развить мощность

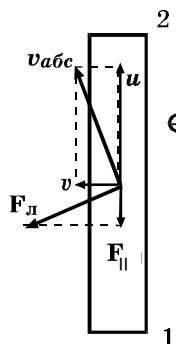
$$P_{\text{мех}} = -P'_{\text{мех}} = P_{\text{стр}},$$

которая и «перейдет» в работу (в единицу времени) действующих внутри него сторонних сил индукции⁴⁵.

⁴⁴ Рассмотрение на рис. 2 проводится для положительных свободных зарядов. В случае отрицательного их знака (и том же токе) на противоположные изменятся лишь направления \mathbf{i} и \mathbf{F}_{\parallel} ; направление же \mathbf{F}_{\perp} останется прежним.

⁴⁵ Описанные процессы лежат в основе работы генератора – машины, преобразующей механическую работу в работу индуцируемых в ее обмотке электродвижущих сил.

Аналогичные явления происходят и при движении в магнитном поле проводника, к концам которого приложена разность потенциалов. Если проводник неподвижен, то ток на участке 1 – 2 (рис. 3) течет только за счет электрических сил. Если же его «отпустить», то под действием магнитной силы появится скорость \mathbf{v} и абсолютная скорость носителей \mathbf{v}_{abc} отклонится от оси проводника. Тотчас же повернется и сила \mathbf{F}_L Лоренца и



1

2

⊙
B

возникнет ее осевая составляющая $\mathbf{F}_{||}$, направленная *навстречу* току. Она повлечет за собой появление сторонней ЭДС \mathcal{E}_{21} для компенсации действия которой (т. е. сохранения неизменным тока) источнику необходимо развить дополнительную мощность $\mathcal{E}_{21}I$.

Повторяя приведенные выше рассуждения, нетрудно показать, что именно эта мощность «выделится» в виде совершенной проводником (в единицу времени) механической работы. Таким образом, и в этом случае полная работа силы Лоренца, конечно, оказывается равной нулю (ибо $\mathbf{F}_L \perp \mathbf{v}_{abc}$). Отрицательная часть ее, вызванная $\mathbf{F}_{||}$, компенсируется работой источника тока, положительная же представляет собой полезную работу проводника.

Рис. 3.

§ 11.2. Вихревое электрическое поле

До сих пор мы не получили ничего физически нового. Закон индукции (4), справедливый для движущегося проводящего контура, однозначно вытекает из выражения (16л17) для силы Лоренца, которая, в свою очередь, является следствием определения магнитного поля (5л16). Если магнитное поле в смысле нашего определения существует, то должен выполняться закон (4). Однако написанная форма этого закона позволяет теоретически обобщить его на значительно более широкий класс явлений, включающий совершенно новый, не имеющий аналогов в статике эффект.

Пусть стационарное магнитное поле \mathbf{B} , в котором перемещается исследуемый проводящий контур Γ' , создается другим неподвижным контуром Γ с током (рис. 4 а), и пусть контур Γ' движется поступательно с постоянной скоростью \mathbf{v} . В силу неоднородности \mathbf{B} магнитный поток, пронизывающий петлю Γ' , при ее движении будет меняться, и в соответствии с (4) в ней возникнет ЭДС индукции \mathcal{E}_u . Остановим теперь Γ' , а контур Γ начнем двигать (в противоположном направлении) со скоростью $-\mathbf{v}$ (рис. 4 б) и посмотрим сначала на происходящее из системы Γ . Мы увидим абсолютно то же самое. Действительно, система эта инерциальна, контур Γ , возбуждающий магнитное поле, в ней покоится, а исследуемый

проводник Γ' движется относительно него со скоростью \mathbf{v} (рис. 4 а). А как будет выглядеть это явление, если вернуться в систему «Земля», где Γ' неподвижен? Результаты измерений, проведенных в этой системе, могут быть предсказаны теорией относительности путем пересчета по соответствующим формулам результатов, полученных в системе Γ . Такой пересчет дает, что результаты эти оказываются, вообще говоря, различными⁴⁶. Однако данные различия становятся сколько-нибудь существенными лишь при скоростях v , сравнимых со скоростью света c . При $v \ll c$ (а именно такую ситуацию мы и рассматриваем) ими вполне можно пренебречь, так что явления индукции в системах Γ и Γ' должны выглядеть одинаково.

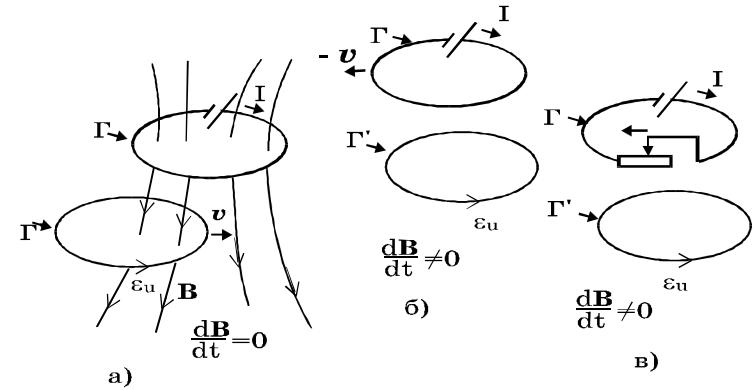


Рис. 4.

Итак, ЭДС индукции, возбуждаемая в контуре Γ' , будет определяться формулой (4) и в том случае, когда контур этот неподвижен, а изменение потока Φ через него вызывается равномерным движением другого контура Γ с током, находящегося поблизости. Но в этом случае в месте расположения Γ' образуется *меняющееся со временем* магнитное поле \mathbf{B} . Такое поле можно получить, если контур Γ остановить и просто менять в нем ток (рис. 4 в). Если разделить контуры Γ и Γ' непрозрачной перегородкой, то экспериментатор, исследуя явление индукции в неподвижном контуре Γ' , не сможет определить, чем оно вызвано: равномерным движением контура Γ или изменением тока в нем. Естественно ожидать поэтому, что и в данном случае возникающая ЭДС будет по-прежнему определяться формулой (4). Более того, мы предположим, что она останется справедливой и при неравномерном движении контура Γ , а также при произвольном изменении тока в нем. Это предположение вполне согласуется с принятой нами точкой зрения близкодействия, согласно которой все «магнитные»

⁴⁶ Различия эти имеют глубокие физические причины и связаны с релятивистским преобразованием длин и времен и инвариантностью заряда.

явления в данной области пространства должны определяться величиной и направлением магнитного поля (и его производных по времени) в этой области и не зависеть от способа, которым создано это поле. Эксперимент полностью подтверждает наше предположение.

Таким образом, при изменении магнитного потока Φ , пронизывающего данный контур, вне зависимости от причин, вызывающих это изменение⁴⁷, в нем возникает ЭДС индукции, определяемая формулой (4). В такой общей форме закон этот называется законом электромагнитной индукции или законом индукции Фарадея.

Но в чем причина возникновения ЭДС в неподвижном контуре, когда \mathbf{B} меняется во времени? На свободные покоящиеся заряды в нем начинает действовать некая сила, которая, если контур замкнут, приводит к появлению индукционного тока. Сила эта, конечно, не электростатического происхождения (некулоновская), причем она действует на заряды пропорционально их величинам. Такие силы мы договорились называть сторонними (именно благодаря этим их свойствам наблюдаемые явления индукции и могут быть охарактеризованы возникающей *электродвижущей силой*). Значит, вследствие изменения магнитного поля в каких-то участках пространства в них появляется некое поле сторонних сил. Что же это за силы? На первый взгляд может показаться, что они сродни лоренцевым: и те и другие возникают при относительных перемещениях зарядов и токов, возбуждающих магнитное поле. Однако природа их оказывается совершенно различной. Для силы Лоренца необходимо наличие проводящего контура (точнее, движущихся вместе с ним зарядов). Если контур убрать, то вместе с ним исчезнет и сила Лоренца. В мысленно проведенном, т. е. некотором геометрическом контуре, перемещающемся в магнитном поле, сторонней ЭДС не возникает. Строго говоря, мы не можем обнаружить этой ЭДС, *иначе как* поместив туда движущийся заряд. Никакими *другими* свойствами, кроме действия на такой заряд, сила Лоренца не обладает.

Совсем иной оказывается ситуация, когда сторонние силы возникают за счет изменения магнитного поля со временем. В этом случае проявляется совершенно новый физический эффект: образуется вихревое электрическое поле, существующее в пространстве независимо от того, есть там проводящий контур, или его нет. Если такой контур имеется и замкнут, то в нем возникает индукционный ток. В противном случае тока, разумеется, нет, но поле все равно существует. Мы можем утверждать это, так как помимо действия на электрический заряд оно обладает еще одним существеннейшим свойством, которое и позволяет его обнаружить, не прибегая к проводящему контуру. Как мы увидим в дальнейшем, изменяясь со вре-

⁴⁷ Причины эти могут действовать одновременно, т. е. контур может перемещаться и деформироваться, а магнитное поле при этом меняться в каждой точке.

менем, оно порождает магнитное поле, причем по точно таким же законам, как и изменяющееся кулоновское⁴⁸. Именно поэтому мы выделяем его из всех остальных сторонних полей и называем электрическим (но не электростатическим!). Поле это – вихревое, непотенциальное, линии его замкнуты, и этим оно принципиально отличается от электростатического. Итак, электрическим мы будем называть теперь поле, могущее породить по определенным законам (об этом речь впереди) магнитное поле. Такие поля разделяются на два класса: потенциальные электростатические, т. е. созданные каким-то распределением заряда, и непотенциальные вихревые, индуцируемые изменяющимся магнитным полем.

Таким образом, возникающая в соответствии с законом (4) ЭДС индукции может иметь две физически совершенно различные причины:

1) поле стационарно, т. е. $B'_i = \frac{dB}{dt} = 0$ в каждой точке, но скорость проводящего контура Γ (или отдельных его участков) $v \neq 0$; при этом природа ЭДС – сила Лоренца $F^{\text{л}}$ и

$$\mathcal{E}_u = \frac{1}{q} \sum_{\Gamma} F_{li}^{\text{л}} \Delta l_i ; \quad (5)$$

2) контур (не обязательно проводящий) Γ неподвижен, т. е. $v = 0$, но поле меняется, так что $B'_i \neq 0$ хотя бы в каких-то участках пространства; в этом случае причина появления ЭДС – вихревое электрическое поле $E^{\text{вихр}}$ и

$$\mathcal{E}_u = \mathcal{E}_u = \sum_{\Gamma} E_{li}^{\text{вихр}} \Delta l_i . \quad (6)$$

Просто удивительно, что два эти физически совершенно различные явления описываются одной и той же формулой (4)!

Закон индукции Фарадея используется для определения единицы магнитного потока. В системе СИ она называется вебером и представляет собой поток через поверхность, ограниченную замкнутой кривой, при равномерном убывании которого до нуля за единицу времени в ней возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = 1$ В:

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ В}\cdot\text{с}.$$

Отсюда может быть установлена единица магнитной индукции. Магнитная индукция равна единице, если через перпендикулярную площадку единичной площади она создает поток, равный единице. В системе СИ⁴⁹

⁴⁸ См. сноску ⁴⁰ на стр.52.

⁴⁹ Мы ввели эту единицу раньше, используя выражение (бл16) для величины магнитной индукции. Поскольку коэффициенты в определении магнитного поля (5л16) и законе электромагнитной индукции (4) одинаковые (во всех системах единиц), определения эти вполне

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб/м}^2.$$

§ 11.3. Исключения из «правила потока»

При вычислении ЭДС индукции по формуле (4) необходимо иметь в виду, что формальное ее использование может иногда приводить к ошибкам. В качестве иллюстрации рассмотрим два примера.

Пусть в перпендикулярном плоскости чертежа поле \mathbf{B} вращается с угловой скоростью ω проводящий диск (рис. 5). Участок OA диска между скользящими контактами A и осью O входит в состав замкнутой цепи OAR , поток Φ через которую при вращении диска не меняется. Однако движущиеся вместе с диском заряды будут испытывать силу Лоренца и в контуре OAR возникнет в соответствии с (5) (где суммирование достаточно распространить лишь на участок OA) ЭДС индукции и потечет ток.

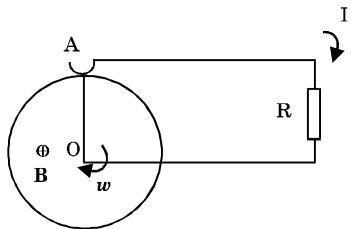


Рис. 5.

Пример обратной ситуации (опять же в *стационарном* магнитном поле) представлен на рис. 6. Две плоские проводящие пластины специальной формы, расположенные в одной плоскости и обращенные друг к другу своими выпуклыми очень пологими (большого радиуса кривизны) кромками, контактируют в точке A , образуя изображенный на рисунке замкнутый контур с гальванометром G . При небольшом покачивании пластин в плоскости чертежа (перпендикулярной направлению магнитного поля) точка контакта будет сильно смещаться вдоль соприкасающихся кромок пластин, приводя к значительному изменению площади контура и пронизывающего его магнитного потока. Стало быть, $\Delta\Phi$ здесь есть, а индукционного тока, как нетрудно понять, практически не возникает. Ведь при таких манипуляциях любой участок пластин перемещений почти не совершает (для этого мы и выбираем их кромки в виде дуг окружностей большого радиуса) и сила Лоренца везде (а следовательно, и возникающая ЭДС) близка к нулю.

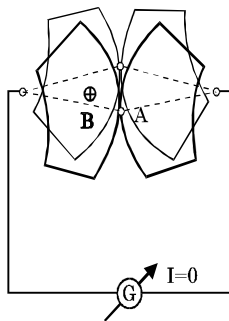


Рис. 6.

Приведенные примеры показывают, что «правило потока» (4) иногда не выполняется.

Из них явствует также, что это может произойти, когда природа ЭДС – сила Лоренца, а цепь составлена из проводников сложной формы, причем скорости участков самого контура и частиц, образующих этот контур, не совпадают. Другими словами, чтобы закон (4) не имел исключений, нужно потребовать, чтобы материал проводящего контура, фигурирующего в (4), *не менялся*. Впрочем, верное *физическое* содержание этого закона – в выражениях (5) и (6), применение которых гарантирует от недоразумений.

§ 11.4. Правило Ленца

Если проводящий контур, магнитный поток через который меняется, замкнут, то в нем возникает индукционный ток, возбуждающий собственное поле. Поскольку поле это составляет с током I правовинтовую систему, а сам ток с изменением внешнего магнитного потока – систему левовинтовую, справедливо следующее правило Ленца. *Индукционный ток всегда имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток $\Phi_{\text{соб}}$ препятствует изменению внешнего потока, вызвавшего этот ток.* Это значит, что если внешний поток убывает, то собственный, препятствуя этому, должен быть направлен в ту же сторону, если же он возрастает, то $\Phi_{\text{соб}}$ направлен навстречу внешнему.

Правило Ленца позволяет сразу находить направление индукционного тока, не прибегая к последовательному применению правил левого и правого винтов.

Правило Ленца может быть получено и непосредственно из энергетических соображений. Рассмотрим, например, два замкнутых проводящих контура, индуктивно связанных друг с другом, т. е. расположенных таким образом, что магнитный поток первого контура частично или полностью пронизывает второй и наоборот. Пусть ток, скажем, в первом контуре случайно увеличился на очень малую величину ΔI_1 (или появился, если его там не было). Тотчас же возникает нарастающий магнитный поток Φ_1 , пронизывающий второй контур, и в нем появится индукционный ток. Если бы собственный магнитный поток Φ_2 этого контура (а он тоже, очевидно, будет нарастающим) вопреки правилу Ленца не препятствовал, а способствовал бы увеличению Φ_1 , то возникшая флуктуация тока в первом контуре начала бы расти: ведь *возрастающий* поток Φ_2 опять же в нарушение правила Ленца вызывал бы *возрастание* Φ_1 , а следовательно, и ΔI_1 . Возник бы лавинный процесс неограниченного роста токов в обоих контурах, что противоречит принципу сохранения энергии, да и здравому смыслу вообще.

§ 11.5. Самоиндукция

Изменяющийся магнитный поток, пронизывающий контур и вызывающий появление ЭДС индукции, не обязательно должен быть внешним. Если в контуре течет ток (индукционный или созданный включенной в него сторонней ЭДС), то имеется собственный магнитный поток через этот контур, который при изменении будет возбуждать в нем \mathcal{E}_i в точности по закону (4). Ведь каждый участок контура находится в поле остальных, которое является для него внешним, а потому и ЭДС, возникающая в нем, не зависит от того, чем создано это поле: остальными участками контура или другими токами.

Рассмотрим уединенный замкнутый проводник произвольной формы (рис. 7) и пустим по нему постоянный ток I , включив в цепь стороннюю

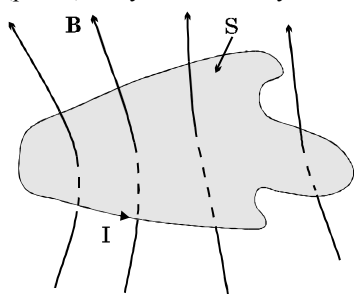


Рис. 7.

ЭДС (на рис. не изображена). Можно показать, что распределение тока по сечению проводника не зависит от его силы, а определяется лишь геометрией и характером изменения проводимости (если она непостоянна) внутри объема проводника⁵⁰. Это значит, что при удвоении тока удваивается его *плотность* (не меняясь по направлению) в каждой точке внутри проводника и, стало быть, по закону Био – Савара (8л16) возбуждаемое им в окружающем

пространстве магнитное поле. Удвоится оно и в точках произвольной поверхности, опирающейся на контур рассматриваемого проводника, и, следовательно, поток через нее $\Phi_{\text{соб}}$ тоже удвоится. Таким образом, поток этот оказывается пропорциональным току, текущему по контуру:

$$\Phi_{\text{соб}} = LI, \quad (7)$$

где постоянный коэффициент L , зависящий от геометрии проводника и распределения внутри него удельной проводимости, называется индуктивностью или коэффициентом самоиндукции проводника.

Из определения L следует его единица – генри (в СИ). Очевидно,

⁵⁰ Доказательство основывается на очевидной линейности электростатической и магнитостатической систем уравнений (10л17 А и В) и соответствующих теоремах единственности. Линейность означает, что сумма любых двух решений этих уравнений тоже является их решением. Если два распределения зарядов (создающих электрическое поле и ток в проводнике) и токов наложить друг на друга, то поля тоже наложатся, и если каждая система зарядов, токов и полей порознь удовлетворяла всюду уравнениям (10л17), то будет удовлетворять им и их сумма. Если эти решения одинаковые, то это и значит, что «все» удвоится, причем в силу теорем единственности указанная ситуация оказывается единственно возможной.

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А},$$

т. е. индуктивность контура равна 1 Гн, если ток в 1 А создает поток через него в 1 Вб.

Найдем в качестве примера индуктивность длинного соленоида. Для этого натянем на контур тока, т. е. на все его N витков, образующих винтовую линию, одну поверхность, площадь которой, очевидно, будет равна NS (где S – площадь витка). Поток вектора \mathbf{B} через нее согласно (12л17)

$$\Phi_{\text{соб}} = BNS = \mu_0 \frac{N}{l} INS = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} I,$$

где l – длина соленоида, откуда индуктивность его

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (8)$$

Отсюда получают единицу магнитной постоянной μ_0 , которая, как нетрудно видеть, оказывается равной Гн/м.

Замечание. Приведенное выше определение индуктивности (7) нуждается в уточнении. Дело в том, что из него неясно, через какую точно поверхность считается поток $\Phi_{\text{соб}}$. Трудность связана с тем, что индуктивность *бесконечно тонкого* проводника, через который поток, а точнее контур поверхности для расчета потока, определяется однозначно, физического смысла не имеет: вблизи такого проводника поле, а вместе с ним и поток стремятся к бесконечности при сколь угодно малом токе I^{51} . Поэтому определение (7) необходимо сразу распространять на случай проводника *конечного* сечения, т. е. достаточно «толстого», внутри которого можно провести различные контуры. Таким образом, при одном и том же токе I в зависимости от выбранного контура (расположенного в толще нашего проводника) его будут пронизывать, вообще говоря, несколько различных (а если проводник достаточно толстый – то существенно различные) потоки, так что коэффициент L оказывается неопределенным. Поэтому уточним определение (7) и будем понимать в нем под $\Phi_{\text{соб}}$ *средний* магнитный поток, пронизывающий рассматриваемый проводник. Для его расчета нужно разбить циркулирующий ток на квазилинейные трубки, в пределах любого сечения которых $B \approx \text{const}$, посчитать поток (созданный всеми трубками) через контур каждой такой трубки и результаты усреднить по всем контурам.

Отсюда понятно, что вычисление индуктивности замкнутого проводника произвольной формы и сечения представляет собой весьма сложную

⁵¹ Это обстоятельство несколько не сужает границ применимости понятия индуктивности: ведь бесконечно тонкий проводник подразумевает бесконечную плотность тока, что физически бессмысленно. При переходе же к непрерывно распределенным токам поле получается всюду конечным и подобных «неприятностей» с $\Phi_{\text{соб}} \rightarrow \infty$ не возникает.

задачу и требует предварительного расчета распределения в нем токов. В рассмотренном выше примере с индуктивностью соленоида мы легко нашли L только потому, что распределение токов фактически уже было задано.

Рассмотрим теперь процессы, происходящие в контуре при изменении тока в нем. Если ток в контуре меняется, а контур не деформируется (т. е. $L = \text{const}$), то в соответствии с (4) и (7) в нем возникает так называемая ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{cu} = -\frac{d\Phi_{\text{соб}}}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}, \quad (9)$$

где знак минус означает, что \mathcal{E}_{cu} направлена навстречу току, если он возрастает, и по току, если он убывает. В более общем случае деформируемого контура в выражении для \mathcal{E}_{cu} появляется член $I \frac{dL}{dt}$, характеризующий вклад в ЭДС этой деформации. Мы, однако, такие случаи рассматривать не будем.

Из (9) следует, что при замыкании цепи постоянного тока с индуктивностью ток достигает своего установившегося значения не мгновенно, а с некоторым опозданием. Возникающая сразу же после замыкания встречная ЭДС самоиндукции мешает нарастанию тока и затягивает процесс. При размыкании же цепи, как только ток начинает падать, появившаяся \mathcal{E}_{cu} поддерживает его. Если цепь разомкнуть быстро, то $\left| \frac{dI}{dt} \right|$, а следовательно \mathcal{E}_{cu} , может достигнуть огромных значений. Это приведет к появлению больших напряжений в месте разрыва цепи и проскакиванию там искры, что позволит току все-таки продлиться некоторое время (ведь мгновенно же он не может исчезнуть!)⁵².

ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 11.6. Собственная энергия тока

Рассмотрим участок цепи, содержащий индуктивность L и сопротивление R , и приложим к его концам постоянную разность потенциалов

$$U = \Phi_1 - \Phi_2$$

⁵² Это – так называемые экстратоки размыкания, вредное явление, для борьбы с которым применяют специальные меры. На этом же принципе основана работа индукционных катушек, служащих для получения высоких импульсных напряжений.

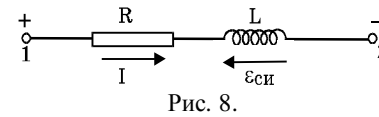


Рис. 8.

(рис. 8). Под действием электрического поля в цепи возникает нарастающий ток I , а вместе с ним – встречная ЭДС $\mathcal{E}_{си}$. Запишем закон Ома для участка цепи 1 – 2:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt}. \quad (10)$$

Домножим (10) на I и перегруппируем члены:

$$(\varphi_1 - \varphi_2)I = I^2R + LI \frac{dI}{dt}. \quad (11)$$

Это выражение показывает, что мощность электрических сил $(\varphi_1 - \varphi_2)I$ частично выделяется в виде джоулева тепла, а частично идет на работу против ЭДС самоиндукции. Работа эта совершается лишь при нарастании тока, когда действует $\mathcal{E}_{си}$, причем она, очевидно, «обратима», т. е. при убывании тока сторонние силы индукции изменяют направление на противоположное и совершают точно такую же работу. Ее называют собственной энергией тока $U_{соб}$.

Итак, собственная энергия тока – это работа, которую нужно совершить против возникающих сил индукции, чтобы создать этот ток (она же выделится при исчезновении тока). Для нахождения $U_{соб}$ построим график зависимости $\Phi_{соб}$ от I (рис. 9). При нарастании тока на величину ΔI_j за время Δt будет, очевидно, в соответствии с (11) совершена работа против сил индукции

$$\Delta A_j = LI_j \Delta I_j,$$

не зависящая от времени этого нарастания и численно равная площади заштрихованной на рис. 9 трапеции. При достижении

тока I полная работа против сторонних сил, т. е. собственная энергия этого тока, окажется равной площади под прямой LI :

$$U_{соб} = \sum_{j=1}^n LI_j \Delta I_j = \frac{1}{2} LI^2. \quad (12)$$

По аналогии с электростатикой можно и здесь ввести понятие взаимной и полной энергии системы токов, однако, ввиду значительной их сложности, мы исключим их из рассмотрения.

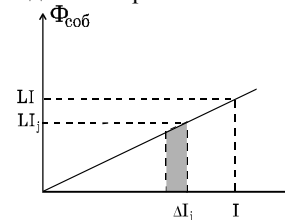


Рис. 9.

§ 11.7. Энергия магнитного поля

Поскольку возникающая ЭДС самоиндукции и, следовательно, собственная энергия тока обусловлены появлением меняющегося магнитного поля, естественно попытаться связать эту энергию именно с полем. Для этого выразим собственную энергию тока в соленоиде через индукцию возбуждаемого им однородного поля. С учетом (8) и (12л17)

$$U_{\text{соб}} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{l} I^2 = \mu_0^2 \frac{N^2}{l^2} I^2 \frac{lS}{2\mu_0} = \frac{B^2 lS}{2\mu_0},$$

т. е. энергия эта оказывается пропорциональной объему $V = lS$, занятому полем. Ее называют энергией магнитного поля W_μ , а энергию, приходящуюся на единичный объем

$$w_\mu = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (13)$$

– плотностью энергии поля.

Можно показать, что в общем случае неоднородного поля произвольной системы токов их полная энергия, т. е. работа, которую нужно затратить против сил индукции, чтобы возбудить эти токи, *представима* в виде энергии магнитного поля

$$W_\mu = \sum_i w_\mu \Delta V_i, \quad (14)$$

где суммирование распространяется на весь объем, занятый полем.

В рамках магнитостатики оба взгляда на энергию равноправны, ибо одинаково хорошо согласуются с экспериментом. Изучая же переменные электромагнитные поля, мы увидим, что там эквивалентность этих трактовок нарушается и опыту соответствует лишь представление о локализации энергии в электромагнитном поле⁵³.

Контрольные вопросы и задания

1. Получить выражение для ЭДС индукции в движущемся проводнике для случая $\mathbf{v} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{l}$.
2. Показать, что при появлении тока в проводнике выражение, полученное в задании 1, не меняется, а также, что работа, произведённая над ним внешней силой, равна работе индуцированной в проводнике ЭДС.
3. Привести полученное в задании 1 выражение к форме закона индукции токов в движущихся проводниках.

⁵³ Ср. сказанное в лекции 13 об энергии электростатического поля.

4. Привести соображения, позволяющие обобщить закон индукции токов в движущихся проводниках на случай неподвижного проводящего контура в меняющемся магнитном поле.
5. Сформулировать закон индукции Фарадея. Что означает в нём знак минус? Какие две физически различные ситуации он охватывает?
6. В каких случаях возникает индукционная ЭДС в проводящем контуре? В непроводящем контуре?
7. В чём причина появления индукционной ЭДС в непроводящем контуре? Как её можно обнаружить?
8. Почему вихревое индукционное поле называется электрическим, а не сторонним?
9. Дать названия и определения единиц магнитного потока и магнитной индукции.
10. Сформулировать и пояснить правило Ленца.
11. Дать определения индуктивности и единицы её измерения.
12. Найти индуктивность длинного соленоида и получить оттуда единицу измерения μ_0 .
13. Получить выражение для ЭДС самоиндукции.
14. Что такое экстратоки размыкания?
15. Что называется собственной энергией тока? Чему она равна?
16. Что называется энергией магнитного поля? Получить выражение для этой энергии, рассматривая длинный соленоид.
17. Что называется плотностью энергии магнитного поля? Привести общее выражение для энергии магнитного поля.
18. Можно ли в рамках магнитостатики экспериментально установить, с чем именно связана магнитная энергия: с магнитным полем или с возбуждающими его токами? Если да, то как именно, если нет – почему?

Оглавление

<i>Лекция 14</i>	3
ГЛАВА 9. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	3
§ 9.1. Электрическое поле постоянного тока	3
§ 9.2. Законы Ома и Джоуля.....	4
§ 9.3. Сопротивление однородного цилиндрического проводника	8
§ 9.4. Сопротивление проводника произвольной формы	10
§ 9.5. Закон Ома в дифференциальной форме.....	12
§ 9.6. Условие стационарности токов	13
<i>Лекция 15</i>	17
§ 9.7. Сторонние электродвижущие силы (ЭДС)	17
§ 9.8. Закон Ома для участка цепи со сторонней ЭДС.....	18
§ 9.9. Закон Ома для замкнутой цепи. Правила Кирхгофа	20
§ 9.10. Обобщенный закон Джоуля.	24
<i>Лекция 16</i>	29
ГЛАВА 10. МАГНИТОСТАТИКА	29
§ 10.1. Взаимодействие постоянных токов.....	29
§ 10.2. Векторное произведение векторов	30
§ 10.3. Вектор магнитной индукции	31
§ 10.4. Закон Био – Савара. Принцип суперпозиции.....	33
§ 10.5. Взаимодействие элементов тока	36
<i>Лекция 17</i>	39
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИКИ.....	39
§ 10.6. Теорема о циркуляции.....	39
§ 10.7. Полная система уравнений магнитостатики. Теорема единственности.....	44
§ 10.8. Сила Лоренца	48
<i>Лекция 18</i>	52
ГЛАВА 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ.....	52
§ 11.1. ЭДС индукции в движущихся проводниках	52
§ 11.2. Вихревое электрическое поле.....	56
§ 11.3. Исключения из «правила потока».....	60
§ 11.4. Правило Ленца	61
§ 11.5. Самоиндукция	62
ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	64
§ 11.6. Собственная энергия тока	64
§ 11.7. Энергия магнитного поля.....	66

Сергей Павлович КРЮКОВ

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Курс лекций
Часть III. Раздел 2

Технический и художественный редактор *И.Н.Коровин*

Подписано к печати _____.2005.
Гарнитура Таймс. Тираж ____.

Школа имени А. Н. Колмогорова
Специализированного учебно-научного центра
Московского Государственного университета им.М.В.Ломоносова
121357 Москва, ул.Кременчугская, 11

тел.449-3364

e-mail: adm@aesc.msu.ru