

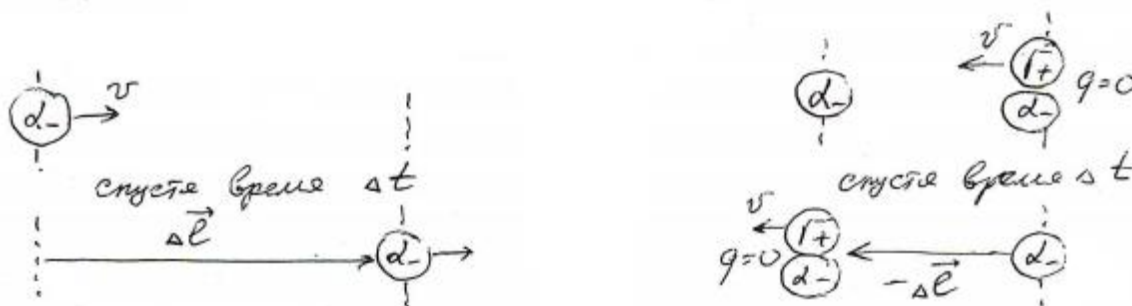
Лекция 1

Ток проводимости. Закон Ома для однородного участка цепи. Параллельное и последовательное соединение проводников

Ток проводимости. Плотность тока. Сила тока

Определение. Током проводимости называется упорядоченное движение свободных зарядов в электрически нейтральных телах.

Заметим, что *реальное* смещение отрицательно заряженной частицы α_- на величину $\Delta \vec{l}$ с точки зрения переноса электрического заряда неотлично от *гипотетического* смещения на величину « $-\Delta \vec{l}$ » гипотетической положительно заряженной частицы Γ_+ с зарядом, равным модулю заряда частицы α_- (см. рисунок).



Количественными характеристиками электрического тока являются вектор плотности тока $\vec{j}$ и сила тока I (скаляр).

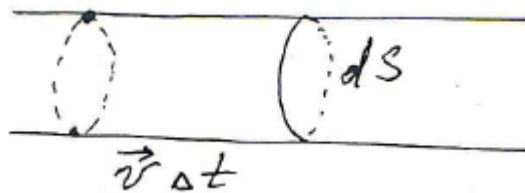
Определение. В каждой точке проводника *вектор плотности тока* $\vec{j}$ направлен в сторону упорядоченного движения (реального или гипотетического) положительных зарядов. Модуль вектора $\vec{j}$ равен отношению величины заряда dq , прошедшего за малый интервал времени dt через малый элемент поверхности dS , *перпендикулярный направлению упорядоченного движения зарядов*, к площади этого элемента поверхности и к величине времени dt :

$$|\vec{j}| = \frac{|dq|}{dt dS}.$$

Таким образом, *направлением вектора плотности тока условились считать направление упорядоченного движения положительно заряженных частиц*. Это удобно, так как при этом направление тока проводимости, как мы увидим позже, всегда совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля. Вместе с тем, направление тока в металлах оказывается противоположным направлению реального упорядоченного движения создающих его электронов.

Если электрический ток создаётся одинаково заряженными частицами, заряд каждой из которых q , а средняя скорость упорядоченного движения $\vec{v}$, то за малое время Δt через сечение

проводника dS , перпендикулярное направлению упорядоченного движения зарядов, пройдут все носители заряда, находящиеся в цилиндре с площадью основания dS и высотой $v\Delta t$. Таких частиц будет $N = n dS v\Delta t$, где n – концентрация заряженных частиц. Эти частицы перенесут заряд $\Delta q = Nq =$



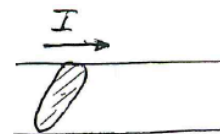
$nqv dS \Delta t$. И, следовательно, модуль плотности тока будет равен: $j = \frac{|\Delta q|}{\Delta t dS} = n |q| v$. По определению вектор плотности тока $\vec{j}$ направлен в сторону упорядоченного движения (реального или гипотетического) положительных зарядов. Поэтому окончательно имеем:

$$\vec{j} = n q \vec{v}.$$

Определение. Силой тока I через какую-либо поверхность называют отношение величины заряда dq , прошедшего за малый интервал времени dt через эту поверхность, к интервалу времени dt :

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

В качестве рассматриваемой поверхности часто используют полное (например, поперечное) сечение проводника. В этом случае говорят о силе тока в этом сечении проводника или просто в проводнике. При схематическом изображении проводника с током направление тока (то есть направление реального или гипотетического переноса положительного заряда) указывают стрелкой.



Зная вектор плотности тока $\vec{j}$ в каждой точке проводника, можно найти силу тока I , протекающего через произвольную поверхность S : сила тока равна потоку вектора плотности тока через поверхность S (поток любого вектора определяется так же, как был определён в электростатике поток вектора напряженности электрического поля).

В частности, если поверхность S перпендикулярна вектору напряженности $\vec{j}$ и плотность тока одинакова во всех точках поверхности S то

$$I_S = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{j S_0 \Delta t}{\Delta t} = j S_0,$$

где S_0 – площадь поверхности S .

Единица силы тока – ампер (А), будет определена позже на основе закона Ампера для силы взаимодействия проводников с током.

Определение. Электрический ток называется постоянным, если во всех точках проводника вектор плотности тока не меняется с течением времени.

Электрический ток в металлах. Закон Ома в дифференциальной форме

Электрический ток в металлических проводниках не вызывает в них никаких изменений, кроме нагревания. Это было подтверждено опытами Э. Рикке (1901 г.). В этих опытах электрический ток примерно год пропускали через три прижатых друг к другу хорошо отполированных цилиндра – медный, алюминиевый и снова медный. Общий заряд, прошедший за это время через цилиндры был очень велик: около $3.5 \cdot 10^6$ Кл при силе тока $I \approx 0.1$ А. После окончания опытов было установлено, что имеются лишь незначительные следы взаимного проникновения металлов, которые не превышают результатов обычной диффузии атомов в твердых телах. Следовательно, свободными носителями заряда в металлах являются не ионы. Остается предположить, что перенос заряда осуществляется отрицательно заряженными частицами, входящими в состав атомов всех веществ – электронами.

В сильно упрощенном виде современные *классические* (в смысле *не* квантово механические) представления о природе металлов сводятся к следующему. Электроны, расположенные на внешних орбитах атомов, наиболее удалены от ядер и весьма слабо связаны в атоме. При образовании кристалла, когда атомы приближаются достаточно близко друг к другу, внешние электроны притягиваются и к соседним ядрам. Это притяжение настолько ослабляет связь внешнего электрона со своим ядром, что он теряет связь с определенным атомом и может перемещаться по всему кристаллу в любом направлении. В результате электроны как *газ* заполняют пространство между ионами решетки. Разумеется, перемещаясь по кристаллу, они взаимодействуют с положительно заряженными ионами решетки. Обычно на каждый атом решетки приходится один или два таких «свободных» электрона. Эти электроны и являются носителями тока в металлах. Слово «свободный» взято в кавычки, так как свойства электронов в металле значительно отличаются от свойств действительно свободных электронов в вакууме.

С точки зрения классической теории средняя скорость теплового движения электронов в металле при комнатной температуре в отсутствии внешнего воздействия составляет около $10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. При этом электрон движется по прямой, пока не столкнется с каким-нибудь ионом решетки. При таком столкновении скорость электрона $\vec{v}$ изменяется по величине и направлению. Столкновения являются независимыми, случайными событиями, поэтому направление скорости электрона после нескольких столкновений не зависит от первоначального направления скорости. В результате средняя скорость (как вектор) электронов равна нулю и полный заряд, переносимый электронами через любое сечение проводника, равен нулю – электрический ток отсутствует.

При появлении в проводнике электрического поля $\vec{E}$ электроны под его действием приобретают ускорение:

$$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E},$$

где $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – модуль заряда электрона, а m – его масса. В результате за время между соударениями электроны приобретают скорость упорядоченного движения $\vec{v}$. Её средняя величина для каждого электрона: $\frac{1}{2}\vec{a}\tau$, а для всех электронов:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{1}{2}a\tau_{\text{ср}} = -\frac{e}{2m}\vec{E}\tau_{\text{ср}}.$$

где $\tau_{\text{ср}}$ – среднее время свободного пробега электрона. Его величина, вообще говоря, может зависеть от E . Однако для не слишком больших токов и напряжений оказывается, что $|\vec{v}_{\text{ср}}|$ на много порядков меньше средней квадратичной скорости теплового движения электронов, и, следовательно, зависимостью $\tau_{\text{ср}}$ от $\vec{E}$ в этих случаях можно пренебречь. Чтобы в этом убедиться оценим среднюю скорость $\vec{v}_{\text{ср}}$ упорядоченного движения электронов в медном проводе сечения $S = 1 \text{ мм}^2$, по которому течёт ток $I = 10 \text{ А}$. Ранее было показано, что

$$\vec{j} = n q \vec{v}_{\text{ср}},$$

где n – концентрация заряженных частиц (число частиц в единице объема). Соответственно, если носителями заряда являются электроны, получим:

$$\vec{j} = -en\vec{v}_{\text{ср}}.$$

Из последней формулы, имеем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{j}{en} = \frac{I}{enS}.$$

Концентрацию «свободных» электронов в меди найдем, считая, что каждый атом меди теряет один электрон (плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, атомное число $A = 64$, N_A – число Авогадро):

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu} = \frac{8,9 \cdot 10^3}{64 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{23} = 8,3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Окончательно, находим:

$$v_{\text{ср}} = \frac{10}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,3 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6}} = 7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Таким образом, действительно с большим запасом $v_{\text{ср}} \ll u_{\text{тепл}} \sim 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Подставляя в выражение для $\vec{j}$ формулу для средней скорости, получим:

$$\vec{j} = \frac{e^2 n \tau_{\text{ср}}}{2m} \vec{E} = \lambda \vec{E},$$

где $\lambda = \frac{e^2 n \tau_{\text{ср}}}{2m}$ – удельная электропроводность металла.

Подчеркнем, что если на электроны кроме электрической силы $\vec{F}_{\text{эл}} = -e\vec{E}$, действует сила другой природы (*сторонняя сила*) $\vec{F}_{\text{стор}}$, то их ускорение между соударениями с ионами решетки

будет равно:

$$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E} + \frac{\vec{F}_{\text{стоп}}}{m} = -\frac{e}{m}(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп}}),$$

где $\vec{E}_{\text{стоп}} = -\frac{\vec{F}_{\text{стоп}}}{e}$. Проводя расчеты, аналогичные только что сделанным, получаем, что в этом случае:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп}})$$

– **закон Ома в дифференциальной форме.**

Заметим, что хотя средняя скорость упорядоченного движения электронов очень мала, ток в проводнике при подключении к источнику тока возникает практически мгновенно. Это связано с тем, что скорость распространения вызывающего возникновение этого тока электрического поля, как оказывается, равна скорости света ($c = 300\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$).

Зависимость удельного сопротивления металлов от температуры

Величина $\rho = 1/\lambda$ называется удельным сопротивлением. Опыт показывает, что при повышении температуры удельное сопротивление всех металлов увеличивается приблизительно по линейному закону:

$$\rho = \rho_0[1 + a(T - T_0)],$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при температуре T_0 (обычно берут $T_0 = 273\text{ K}$), ρ – удельное сопротивление при температуре T , a – температурный коэффициент сопротивления.

Температурные коэффициенты сопротивления большинства чистых металлов сравнительно мало отличаются друг от друга и примерно равны $(0,002 \div 0,006) \frac{1}{\text{K}}$. Температурные коэффициенты сопротивления сплавов, как правило, значительно меньше, чем у чистых металлов и могут достигать $10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$.

Рост удельного сопротивления металлов с температурой может быть качественно объяснен исходя из классических представлений. Согласно полученному ранее выражению для λ

$$\rho = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{2m}{ne^2} \frac{\vec{u}_{\text{тепл}}}{l_{\text{ср}}}.$$

Здесь учтено, что среднее время свободного пробега электрона $\tau_{\text{ср}} \approx l_{\text{ср}}/\vec{u}_{\text{тепл}}$, где $l_{\text{ср}}$ – средняя длина свободного пробега. С классической точки зрения с ростом температуры усиливаются тепловые колебания ионов решетки, в результате чего возрастает их эффективное сечение, и, следовательно, увеличивается вероятность «попадания» в них электронов. Как результат, уменьшается $l_{\text{ср}}$. Кроме того, с ростом температуры с классической точки зрения должна увеличиваться и средняя скорость теплового движения электронов. Однако, как показывает

квантовая теория, этого практически не происходит. Оказывается также, что при достаточно низких температурах (для ртути $\leq 4,12\text{ K}$; для современных керамических высокотемпературных сверхпроводников $\lesssim 100\text{ K}$) сопротивление ряда материалов скачком падает до нуля. Это явление, открытое в 1911 году, получило название *сверхпроводимости*.

Напряжение. Вольт - амперная характеристика. Закон Ома для однородного участка цепи

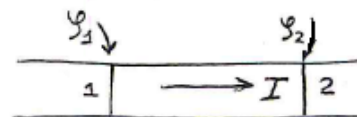
Определение. Напряжением U между двумя точками пространства $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ называется разность потенциалов электростатического поля в этих точках:

$$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2).$$

Если состояние участка цепи (его температура, механическое состояние, химический состав и т.п.) не меняется, то для него характерна определенная зависимость между напряжением U на его концах («приложенным к его концам») и силой тока I в нем:

$$I = f(U).$$

Эта зависимость называется *вольт-амперной характеристикой* данного участка цепи. При этом $U = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 – потенциалы на «входе» и «выходе» участка цепи соответственно, а сила тока I считается положительной, если ток течет от его входа к его выходу и отрицательным – в обратном случае. Если участок цепи не симметричный, то положения входа и выхода указывается с помощью маркировки.



Определение. Участок электрической цепи, на котором электрический ток создаётся только электростатическим полем, называются *однородным*.

Определение. Участок цепи, на котором электрический ток создается не только электростатическими силами, но и не электростатическими, так называемыми *сторонними силами*, называют *неоднородным участком цепи*.

Для многих однородных участков цепи, в особенности для металлических проводников, вольт – амперная характеристика имеет особенно простой вид – сила тока пропорциональна приложенному напряжению:

$$I = \frac{1}{R} U.$$

Этот закон был экспериментально установлен Георгом Омом в 1826 году и носит название *закона Ома для однородного участка цепи*. Коэффициент R называется *электрическим сопротивлением проводника (участка цепи)*, а обратная величина $1/R$ – *электропроводностью проводника*. Электропроводность зависит от вещества, из которого сделан проводник, от его геометрических размеров и формы. Для сопротивления проводника постоянного сечения S и длины L справедлива следующая формула:

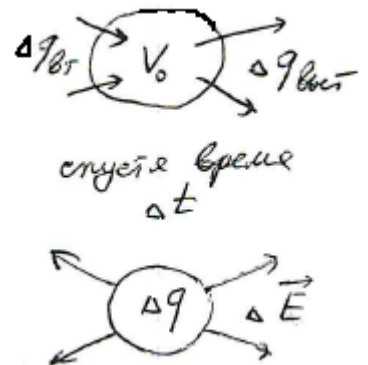
$$R = \rho \frac{L}{S}.$$

Единица сопротивления в СИ называется «Ом» (Ом). 1 Ом равен сопротивлению проводника, между концами которого возникает напряжение 1 В при силе постоянного тока 1 А.

Последовательное и параллельное соединение проводников

Утверждение. В проводнике с постоянным током, находящемся в постоянных внешних силовых полях, распределение зарядов со временем не меняется. Иными словами, если в какую-то область проводника за время Δt втекает заряд $\Delta q_{\text{вт}}$, то такой же заряд за это же время из этой области и выходит: $\Delta q_{\text{выт}} = \Delta q_{\text{вт}}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой части проводника V_0 данное утверждение не справедливо. Тогда спустя время Δt эта часть проводника приобретет дополнительный заряд $\Delta q = \Delta q_{\text{вт}} - \Delta q_{\text{выт}}$. Этот заряд будет создавать дополнительное электрическое поле $\Delta \vec{E}$, которое по закону Ома в дифференциальной форме будет изменять вектор плотности тока. Но тогда это уже не будет постоянным током. Полученное противоречие доказывает утверждение.



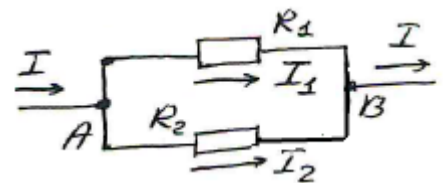
Следствие. Сила *постоянного* электрического тока для любых полных сечений проводника одинакова.

При параллельном соединении проводников напряжения U_1 и U_2 на их концах *одинаковы по определению параллельного соединения*:

$$U_1 = \varphi_A - \varphi_B = U_2 = U.$$

Кроме того, по следствию из только что доказанного утверждения $I = I_1 + I_2$. Кроме того, по закону Ома для однородного участка цепи

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}.$$



Итак,

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U = \frac{1}{R} U.$$

где $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ – общее сопротивление рассматриваемой цепи.

Если цепь состоит из N параллельно соединенных проводников с сопротивлениями $R_1, R_2, \dots, R_N$, то, рассуждая аналогично, получим, что общее сопротивление цепи:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}.$$

Таким образом, *при параллельном соединении проводников полная проводимость цепи равна сумме проводимостей всех отдельных проводников.* Кроме того,

$$\frac{I_i}{I_j} = \frac{U}{R_i} : \frac{U}{R_j} = \frac{R_j}{R_i} \quad (i, j \in \{1, 2, \dots, N\}),$$

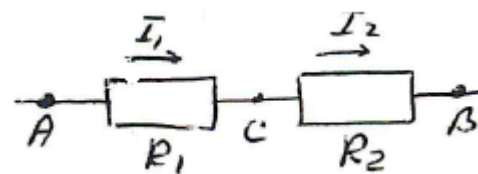
т.е. *силы токов в соединенных параллельно проводниках обратно пропорциональны их сопротивлениям.*

При последовательном соединении проводников сила постоянного тока во всех проводниках одинакова:

$$I = I_1 = I_2.$$

Кроме того,

$$U = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_B) = U_1 + U_2,$$



где U_1, U_2 – напряжение на концах первого и второго проводников соответственно, и по закону Ома для однородного участка цепи:

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2.$$

Поэтому

$$U = I(R_1 + R_2) = RI,$$

где $R = R_1 + R_2$ – общее сопротивление рассматриваемой цепи.

Если цепь состоит из N последовательно соединенных проводников с сопротивлениями $R_1, R_2, \dots, R_N$, то, рассуждая аналогично, получим, что общее сопротивление цепи:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N.$$

Таким образом, *при последовательном соединении проводников полное сопротивление цепи равно сумме сопротивлений всех отдельных проводников.* Кроме того,

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{IR_i}{IR_j} = \frac{R_i}{R_j} \quad (i, j \in \{1, 2, \dots, N\}),$$

т.е. *напряжения на последовательно соединенных проводниках распределяются пропорционально их сопротивлениям.*