

## Лекция 1

### Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара-Лапласа

#### Магнитное поле. Замкнутый контур с током в однородном магнитном поле

Вещества, притягивающие железо, были известны человечеству еще до начала нашей эры. Они получили названия магнитов. Постоянный магнит в форме тонкой полоски, расположенной на плавающей в воде деревянной дощечке, поворачивается одним концом в направлении Северного полюса Земли, а другим – в направлении Южного. Поэтому концы магнита так и называются северным и южным полюсами. Это наблюдение привело к созданию компаса. Впервые компасы появились в Китае, скорее всего, на границе первого и второго тысячелетий нашей эры. В Европе изобретение компаса относят к XII – XIII векам. В 1600 году английский физик У. Гильберт опубликовал большой труд “О магните”, в котором описал множество проведенных им за 18 лет опытов по изучению электрических и магнитных явлений. Он первым пришел к заключению, что Земля является большим магнитом.

Первоначально казалось, что электричество и магнетизм две разные области, не имеющие между собой ничего общего. Однако дальнейшее развитие науки показало тесную взаимную связь электрических и магнитных явлений. Первое фундаментальное открытие в этом направлении было сделано в 1820 году датским физиком Х. К. Эрстедом. В феврале 1820 г. Эрстед показывал студентам тепловое действие тока, протекающего по проводнику. Рядом с проводником случайно оказался компас. При появлении тока в проводнике стрелка отклонилась от начального положения.

Этот простой опыт произвел сильное впечатление на современников. Дальнейшие события развивались стремительно. 11 сентября 1820 года Эрстед показал свой опыт на заседании Французской академии наук. Один из академиков А.М. Ампер увидел в этом опыте косвенное подтверждение своих догадок, сводящих магнетизм к чисто электрическим явлениям. Все считали, что ток, проходя по проводнику, превращает его в магнит, который и заставляет отклоняться стрелку компаса. Формально это так, но лишь Ампер догадался о причине такого превращения, высказав гениальную мысль, что сам магнит представляет собой совокупность токов. И именно поэтому любой проводник с током ведет себя подобно магниту. 25 сентября он демонстрирует новый опыт, подтверждающий его догадку: два незаряженных параллельных провода, по которым текут одинаково направленные токи, притягиваются друг к другу; при перемене

направления одного из токов силы притяжения сменяются силами отталкивания. В другой серии опытов Ампер показал, что спирали, по которым пропускают ток, ведут себя подобно магнитам. В этом же году Д. Араго обнаружил намагничивание железных опилок вблизи проводника с током.

**Определение.** Взаимодействия между проводниками с током, между токами и магнитами и между магнитами называют **магнитными взаимодействиями**, а соответствующие силы взаимодействия – **магнитными силами**.

Учитывая гипотезу Ампера о том, что любой магнит представляет собой совокупность микроскопических (молекулярных и внутриатомных) токов, можно дать более короткое определение **магнитного взаимодействия как взаимодействия между телами с токами**.

Согласно теории близкодействия ток в одном из проводников не может непосредственно действовать на другой ток: подобно тому, как в пространстве, окружающем неподвижные электрические заряды, возникает электрическое поле, *в пространстве, окружающем токи, т.е. движущиеся заряды, возникает поле, называемое магнитным*. Иными словами, электрический ток, текущий по одному из проводников, создает вокруг себя магнитное поле, которое действует на ток во втором проводнике, а поле, созданное вторым током, действует на первый ток.

**Определение.** **Магнитное поле** представляет собой особую форму материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между токами (движущимися зарядами).

*Таким образом, магнитное поле порождается электрическим током и обнаруживается по действию на ток.*

Прямым экспериментальным доказательством реальности магнитного поля, как и реальности электрического поля, является факт существования электромагнитных волн, о которых мы будем говорить позже.

### **Индукция магнитного поля. Магнитный дипольный момент замкнутого контура с током**

Для исследования магнитного поля, казалось бы, удобно взять очень малый элемент тока, т.е. малый отрезок тонкого проводника с током, подобно тому, как для исследования электрического поля использовалось небольшое заряженное тело. Однако постоянный ток в отрезке проводника не может существовать, потому что любая цепь, по которой идет

постоянный ток, всегда замкнута. Поэтому элемент постоянного тока создать нельзя и, следовательно, невозможно с его помощью исследовать магнитные поля.

Магнитное поле действует на магниты, и, следовательно, их можно использовать для его исследования. Часто так и делают, однако точные количественные измерения при этом сильно затруднены, из-за сложностей в изготовлении абсолютно одинаковых магнитов, а так же из-за перемагничивания магнитов под действием магнитного поля (подробнее этот эффект будет рассмотрен позже).

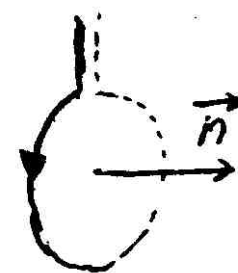
Оказалось, что для изучения магнитного поля лучше всего взять **замкнутый контур малых размеров** (по сравнению с расстояниями, на которых магнитное поле заметно меняется). Например, можно взять маленькую плоскую проволочную рамку произвольной формы. Проводники, подводящие ток к рамке, нужно расположить близко друг к другу или сплести вместе, тогда суммарный ток в них будет равен нулю, и, следовательно, полная сила, действующая со стороны магнитного поля на эти проводники, так же будет равна нулю. Опыт показывает, что если поместить такую рамку с током в однородное магнитное поле, то она будет вести себя так же как магнитная стрелка: однородное магнитное поле будет оказывать на рамку с током **ориентирующее действие**.

Иными словами, в магнитном поле *свободная рамка с током* на гибком подвесе, со стороны которого не действуют силы упругости, препятствующие ориентации рамки, поворачивается до тех пор, пока не устанавливается строго определенным образом. Причем оказывается, что конечная ориентация рамки не зависит от ее формы и величины тока, протекающего через рамку. Так же ведет себя и магнитная стрелка. Это говорит о том, что величина, характеризующая магнитное поле, должна быть векторной величиной, а направление этого вектора должно быть связано с ориентацией рамки или магнитной стрелки.

**Определение.** Векторную величину, характеризующую магнитное поле, называют **вектором магнитной индукции  $B$** .

Заметим, что здесь и далее векторные величины будут обозначаться латинскими буквами, выделенными жирным шрифтом.

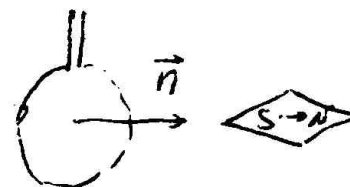
**Определение.** За направление вектора магнитной индукции в том месте, где расположена **свободно** подвешенная рамка с током, принимают направление перпендикуляра к рамке, найденное по **правилу буравчика**: перпендикуляр (нормаль  $n$ ) проводят в ту сторону, куда перемещался бы буравчик (винт), при вращении его рукоятки по направлению тока в рамке.



Пример найденной таким образом нормали приведен на рисунке. На этом и всех последующих рисунках при изображении предмета (в данном случае это контур), расположенных в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка, дальние части предмета изображаются пунктирной линией.

**Замечание.** Под винтом (буравчиком) здесь и далее имеются в виду винт (буравчик) с правой резьбой, что является повсеместным стандартом. Винт с правой резьбой (правый винт) по определению это такой винт, который закручивается (вперед), когда мы вращаем его по часовой стрелке.

Направление вектора магнитной индукции можно определить и с помощью магнитной стрелки, представляющей собой маленький продолговатый постоянный магнит с двумя полюсами на концах: южным ( $S$ ) и северным ( $N$ ). Дело в том, что как показывает опыт, если магнитная стрелка может свободно вращаться в пространстве, то в магнитном поле **направление линии, проведенной через центр стрелки от  $S$  к  $N$ , совпадут с направлением нормали  $n$  к рамке с током** (см. рис.). Следовательно, за направление вектора магнитной индукции можно принять и направление от  $S$  к  $N$  (**против алфавита!**) **внутри** свободно устанавливающейся стрелки.



Ориентирующее действие однородного магнитного поля на замкнутый контур с током может быть использовано также для определения модуля вектора магнитной индукции. Из уравнения вращательного движения абсолютно твердого тела следует, что ориентирующее действие поля может быть обусловлено только тем, что на рамку с током со стороны однородного магнитного поля действует момент сил. Этот момент сил может зависеть, с одной стороны, от магнитного поля, а с другой – от геометрии контура, его ориентации и силы тока в нем. В отсутствие магнитного поля этот момент, очевидно, равен нулю. Экспериментируя с рамками разных размеров и форм, а также меняя силу тока в них можно установить, что **в однородном магнитном поле момент магнитных сил, действующих на рамку:**

- 1) не зависит от формы рамки;
- 2) принимает максимальное значение  $M_{max}$ , когда вектор  $\mathbf{B}$  лежит в плоскости рамки (т.е. вектор  $\mathbf{n}$  нормали к рамке перпендикулярен вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$ );
- 3) максимальный момент сил  $M_{max}$ , действующих на рамку с током, пропорционален площади  $S$  рамки и силе тока  $I$  в ней:

$$M_{max} \sim IS.$$

Эти опытные факты можно использовать для определения модуля вектора магнитной индукции, характеризующего магнитное поле в том месте, где расположена рамка.

Действительно, т.к. наибольший момент сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля, не зависит от формы рамки, пропорционален её площади и силе тока в ней, то отношение

$$\frac{M_{max}}{IS} = B$$

не зависит от свойств рамки и характеризует только магнитное поле в данной точке пространства. Эта величина и называется **модулем вектора магнитной индукции**.

За единицу магнитной индукции принята магнитная индукция однородного поля, в котором на рамку площадью  $S = 1 \text{ м}^2$  при силе протекающего в ней тока  $I = 1 \text{ А}$  действует со стороны поля момент сил  $M_{max} = 1 \text{ Н*м}$ . Единица магнитной индукции получила название **тесла** (Тл). В честь югославского учёного-электротехника Н. Тесла.

Заметим, что величина  $p_m = ISn$  называется магнитным дипольным моментом контура с током. Здесь  $n$  – единичный вектор нормали к плоскому контуру, связанный правилом буравчика с направлением тока в нем.

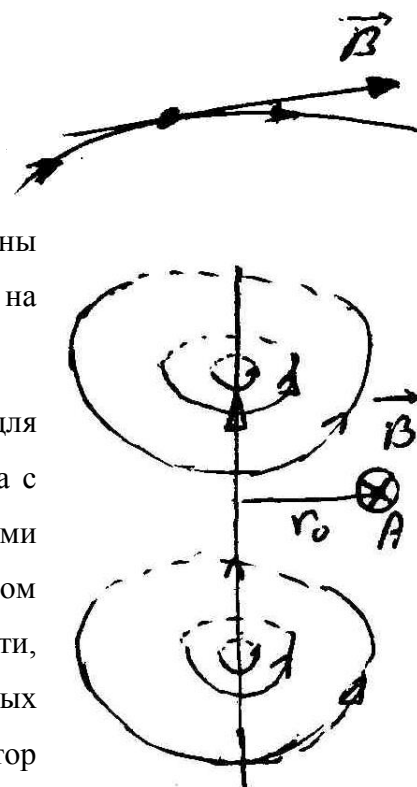
### Линии магнитной индукции. Магнитное поле прямого тока. Линейный элемент тока. Закон Био-Савара-Лапласа.

Наглядную картинку магнитного поля можно получить, если построить так называемые **линии магнитной индукции**.

**Определение.** *Линией магнитной индукции называют направленную линию, касательная к которой в каждой точке направлена вдоль вектора  $B$ .*

В этом отношении линии магнитной индукции аналогичны линиям напряженности электростатического поля. Однако, на этом их сходство заканчивается.

Построим, например, линии магнитной индукции для магнитного поля достаточно длинного прямого проводника с током. Простые опыты с магнитными стрелками или рамками с током показывают, что линиями магнитной индукции в этом случае будут окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводнику с током, центры которых находятся на оси проводника. Иными словами, вектор индукции магнитного поля, создаваемого прямым проводником с током в любой точке  $A$ ,



перпендикулярен плоскости, проходящей через точку  $A$  и проводник с током. При этом направление тока в проводнике оказывается связанным с направлением линий магнитной индукции создаваемого им магнитного поля правилом буравчика: ток течет в ту сторону, куда перемещался бы буравчик, при вращении его рукоятки по направлению линии магнитной индукции (см. рисунок).

Измерение величины магнитного поля прямого проводника с током, показывает, что она пропорциональна силе тока  $I$  и обратно пропорциональна кратчайшему расстоянию  $r_0$  от оси проводника до точки наблюдения:

$$B = k_m \frac{I}{r_0}.$$

Этот закон был установлен экспериментально в 1820 году совместно двумя учеными: Жаном-Батистом Био и Феликсом Саваром, и называется **законом Био-Савара**.

Коэффициент пропорциональности  $k_m$  зависит от выбора системы единиц. В Международной системе единиц СИ этот коэффициент **точно** (в силу определения единицы измерения силы тока) равен

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot \text{кг} / (\text{с}^2 \cdot \text{А}^2) = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} / \text{А}^2.$$

Однако, его принято записывать в виде

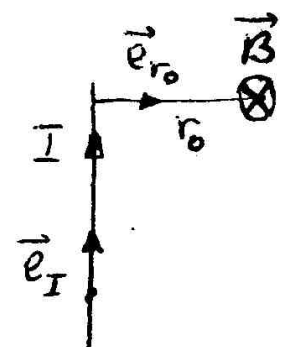
$$k_m = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

где величина  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot \text{кг} / (\text{с}^2 \cdot \text{А}^2)$  называется **магнитной постоянной**.

В векторной форме закон Био-Савара имеет вид:

$$\mathbf{B} = k_m \frac{I[\mathbf{e}_I * \mathbf{e}_{r_0}]}{r_0},$$

где  $I$  – сила тока,  $r_0$  – кратчайшее расстояние от оси тока до точки наблюдения;  $\mathbf{e}_I$  и  $\mathbf{e}_{r_0}$  – единичные векторы в направлении тока и кратчайшего перемещения от оси тока к точке наблюдения соответственно, а квадратные скобки обозначают векторное произведение.



Напомним, что **векторным произведением**  $[\mathbf{a} * \mathbf{b}]$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор, модуль которого равен  $absin\alpha$ , где  $\alpha$  – модуль любого угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . При этом направление вектора-произведения определяется правилом буравчика: если нарисовать векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  так, чтобы их начала совпадали и вращать

первый вектор-сомножитель ( $\mathbf{a}$ ) кратчайшим образом ко второму вектору-сомножителю ( $\mathbf{b}$ ), то буравчик, вращающийся таким же образом, будет завинчиваться в направлении вектора-произведения.

Как уже говорилось выше, закон Био-Савара был установлен экспериментально в 1820 году. В этом же году Пьер Симон де Лаплас отталкиваясь от закона Био-Савара предсказал один из фундаментальных законов электродинамики, определяющий индукцию магнитного поля, создаваемого **линейным элементом тока**. Этот закон называют **законом Био-Савара-Лапласа**.

Чтобы понять, что такое линейный элемент тока, рассмотрим вначале тонкий (линейный) проводник, по которому течёт ток  $I$ .

**Определение.** Участок линейного проводника малой длины  $dl$  называется *линейным элементом тока* при выполнении следующих условий: его поперечные размеры пренебрежимо малы по сравнению с его длиной  $dl$ , а длина – пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием до точки наблюдения и настолько мала, что эту часть проводника можно считать прямолинейной (т.е.  $dl$  много меньше радиуса кривизны данной части линейного проводника).

Обобщение на случай толстых проводников можно провести следующим образом: пусть мы знаем вектор плотности тока во всех точках толстого проводника. Тогда разбив толстый проводник на большое число соприкасающихся тонких проводников, поверхности которых являются трубками тока (здесь вполне уместна терминология, использованная при изучении гидродинамики стационарного потока жидкости), получим систему параллельно соединённых тонких проводников, по каждому из которых протекает некий постоянный ток. А разбивать тонкие проводники на линейные элементы тока мы уже умеем.

**Замечание.** Трубочкой тока здесь называется часть проводника в форме трубки, боковая поверхность которой образована линиями тока, т.е. линиями, касательные к которым в каждой их точке параллельны вектору плотности тока в этой точке. Нетрудно понять, что в случае постоянного тока форма любой трубки тока внутри толстого проводника не меняется со временем (обратное означало бы изменение со временем векторов плотности тока в некоторой части проводника). Кроме того, сила тока через любую часть боковой поверхности трубки тока равна нулю, и значит, сила тока через любое её поперечное сечение является одной и той же величиной.

Модель линейного элемента тока играет в магнитостатике такую же роль, как модель точечного заряда в электростатике.

В своих рассуждениях Лаплас опирался на *два основных предположения*:

1) Для магнитных полей справедлив принцип суперпозиции: если разбить произвольным образом проводник с током  $I$  на  $N$  частей, то индукция  $\mathbf{B}$  магнитного поля, создаваемого в любой точке пространства проводником в целом, будет равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждой из  $N$  частей проводника в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i,$$

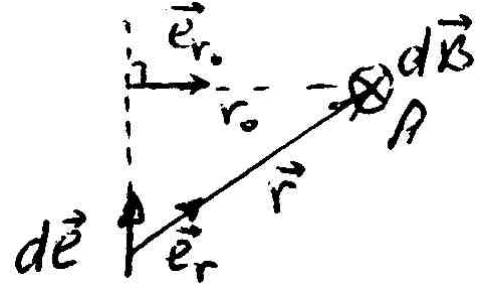
где  $\mathbf{B}_i$  – индукция магнитного поля, создаваемая  $i$ -ой частью проводника.

2) Как и в случае магнитного поля прямого тока, вектор индукции магнитного поля линейного элемента тока в любой точке  $A$  перпендикулярен плоскости, проходящей через точку  $A$  и проводник с током, а его направление определяется правилом правого винта.

Исходя из этих двух и ряда других предположений, Лаплас предложил следующую формулу для индукции магнитного поля, создаваемого линейным элементом тока в точке  $A$ :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{e}_r]}{r^2}, \quad (1)$$

где  $I$  – сила тока, протекающего по линейному элементу тока,  $d\mathbf{l}$  – вектор, направленный вдоль линейного элемента тока, причём его модуль  $dl$  равен длине элемента тока,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки  $A$  относительно рассматриваемого линейного элемента тока,  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  – единичный вектор в направлении от



элемента тока к точке  $A$ . Формула (1) является математической записью закона Био-Савара-Лапласа для магнитного поля линейного элемента тока.

Заметим, что  $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dS d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV$ , где  $dS$  – площадь поперечного сечения линейного элемента тока, а  $dV$  – его объем. Поэтому формулу (1) можно записать также в виде:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}]}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{e}_r]}{r^2} dV. \quad (2)$$

При этом векторную величину  $\mathbf{j} dV$  обычно называют *объемным элементом тока*.

Запись закона Био-Савара-Лапласа в форме (1) наиболее удобна для тонких (линейных) проводников, поперечные размеры которых в условиях рассматриваемой



задачи не существенны. Для её использования достаточно знать линейную геометрию проводника и силу тока в нём. Формула (2) является более универсальной и может быть использована и для расчета магнитного поля, создаваемого толстым проводником с током. Однако для её использования необходимо знать вектора плотности тока во всех точках проводника.

Естественно, что, пользуясь только законом Био-Савара (без дополнительных предположений), нельзя получить значительно более общий закон Био-Савара-Лапласа. Возникает вопрос: почему же мы все-таки уверены в справедливости последнего? Ответ: потому что рассчитанные на его основе поля различных контуров совпадают в пределах погрешности с результатами экспериментов.