Колебания. Лекция 2

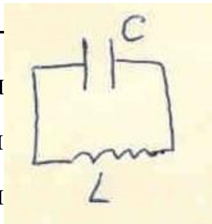
Собственные электрические колебания. Вынужденные колебания. Резонанс

Собственные электрические колебания. Формула Томсона

Электрические колебания были открыты после того, как изобрели первый конденсатор (лейденскую банку) и научились сообщать ему большой заряд с помощью электростатической машины. Замыкая с помощью проволочной катушки обкладки сильно заряженной лейденской банки, обнаружили, что стальные спицы внутри катушки намагничиваются. В этом ничего странного не было: электрический ток должен намагничивать стальной сердечник катушки. Удивительным было то, что нельзя было предсказать, какой конец сердечника катушки окажется северным полюсом, а какой – южным. Повторяя опыт примерно в одинаковых условиях, получали разные результаты. Далеко не сразу поняли, что при разрядке конденсатора через катушку возникают колебания: за время разрядки конденсатор успевает много раз перезарядиться, а ток много раз изменяет направление. Из-за этого остаточная намагниченность сердечника и получается различной.

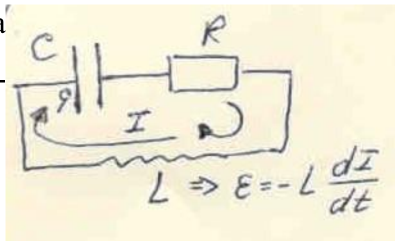
Определение. Периодически повторяющиеся изменения силы тока в электрической цепи называют **электрическими колебаниями**.

Простейшая система, в которой могут происходить ***свободные электрические колебания*** (т. е. электрические колебания, происходящие без потребления энергии от внешних источников), состоит из конденсатора и катушки, присоединенной к обкладкам конденсатора. Такая система называется **колебательным контуром**. Рассмотрим, почему в таком контуре возникают колебания. При подключении обкладок заряженного конденсатора к концам катушки в цепи естественно появляется электрический ток. Сила тока, однако, не сразу достигает максимального значения, а увеличивается постепенно, что обусловлено явлением самоиндукции. В силу этого же явления, электрический ток не прекращается в момент, когда конденсатор полностью разряжается. В результате система «проходит положение равновесия» и конденсатор начинает перезаряжаться и т. д. С энергетической точки зрения происходят взаимные превращения энергии электрического поля заряженного конденсатора в энергию магнитного поля катушки и обратно.



До сих пор мы применяли законы Ома и правила Кирхгофа только к постоянным токам. Однако, их можно применять и к изменяющимся токам, если только изменение силы тока происходит не слишком быстро. Точнее изменение ЭДС в контуре должно быть настолько медленным, чтобы за характерное время установления электрического равновесия в цепи относительные изменения ЭДС и токов были малы. Такие токи называют медленно меняющимися или ***квазистационарными***, в том смысле, что в каждый момент времени их величина одинакова в разных точках неразветвленных участков цепи. Для таких квазистационарных токов ***мгновенные значения токов и ЭДС будут подчиняться всем законам постоянных токов***. Установление электрического равновесия происходит со скоростью близкой к скорости света. Поэтому под понятие квазистационарных токов в не очень длинных электрических цепях подпадают весьма быстрые в обычном смысле процессы. Даже электрические колебания с периодом порядка 10^{-6} секунды в колебательном контуре с характерным размером 1 метр вполне можно рассматривать как квазистационарные.

Применительно к простейшему колебательному контуру второе правило Кирхгофа имеет вид (см. рисунок, где указаны обкладка конденсатора, за зарядом q которой мы следим, и положительные направления тока и обхода контура):



$$\frac{q}{C} + IR = \varepsilon,$$

где $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$ – ЭДС самоиндукции, возникающей на катушке. При записи этого уравнения мы выбрали произвольным образом направление обхода контура, положительное направление тока, совпадающее с направлением обхода, и обкладку конденсатора, за зарядом q на которой мы наблюдаем (q может иметь любой знак). В силу двух последних выборов (см. рисунок) связь между зарядом q и током I имеет вид:

$$\frac{dq}{dt} = I.$$

Учитывая это, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0.$$

Рассмотрим для начала идеальный колебательный контур, активным сопротивлением которого можно пренебречь ($R \approx 0$). В этом случае имеем:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Как мы знаем, это уравнение описывает гармонические колебания заряда q на конденсаторе с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Ясно, что с такой же частотой будет изменяться и ток $I = \frac{dq}{dt}$. Для периода свободных колебаний в контуре можно записать:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Эта формула называется ***формулой Томсона*** в честь английского физика, который впервые её вывел.

Заметим, что поскольку $I = \frac{dq}{dt}$, то колебания силы тока опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ колебания заряда («ток уже есть, а заряда еще нет») подобно тому, как колебания скорости при механических колебаниях опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ колебания смещения. В действительности из-за энергетических потерь колебания будут затухающими.

Затухающие колебания в *RLC*-контуре. Логарифмический декремент затухания. Добротность

В предыдущем пункте мы получили, что изменение заряда на обкладках конденсатора в колебательном LC – контуре описывается следующим уравнением:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Его удобно переписать в виде:

$$q'' + 2\gamma q' + \omega_0^2 q = 0, \qquad (1)$$

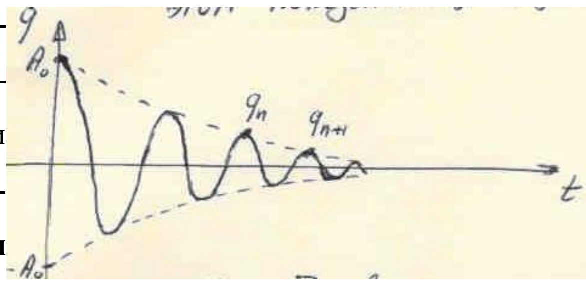
где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, а $\gamma = \frac{R}{2L}$.

Из энергетических соображений ясно, что из-за тепловых потерь в контуре амплитуда колебаний заряда на конденсаторе будет уменьшаться. Т. е. движение системы, строго говоря, не будет периодическим.

Уравнение затухающих колебаний (1) имеет точное решение. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что если $\gamma < \omega_0$, то оно имеет вид:

$$q(t) = A_0 e^{-\gamma t} cos(\omega_1 t + \alpha), \text{ где } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Здесь A_0 и α – начальная «амплитуда» и начальная «фаза» затухающих колебаний, значения которых определяются из начальных условий (поскольку колебания в этом случае не являются гармоническими, то об их амплитуде и фазе можно говорить лишь условно). Показатель γ называется **коэффициентом затухания** колебаний. При малом затухании, когда $\gamma \ll \omega_0$, величина ω_1 практически совпадает с частотой свободных колебаний ω_0, и стоящий перед косинусом множитель $A_0 e^{-\gamma t}$ можно рассматривать как медленно меняющуюся со временем (по сравнению с периодом свободных колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$) амплитуду колебаний.



Затухающие колебания не являются периодическим процессом в строгом смысле этого слова. Однако, этот процесс обладает все же определенной **повторяемостью.** Например, заряд q обращается в ноль через одинаковые минимальные промежутки времени $\frac{T}{2}$ ($T = \frac{2\pi}{\omega_1}$). Пользуясь методами математического анализа, можно показать, что максимальные и минимальные значения заряда (а также тока и напряжения) также достигаются через одинаковые минимальные промежутки времени, равные T. Этот промежуток времени Т и называют периодом затухающих колебаний, а ω_1 – их циклической частотой.

Пусть q_n и q_{n+1} – максимальные значения заряда конденсатора в двух последовательных максимумах, достигаемых в моменты времени t_n и t_{n+1}. Как уже говорилось, можно показать, что $t_{n+1} = t_n + T$. Учитывая явный вид решения, имеем:

$$q_n = A_0 e^{-\gamma t_n} cos(\omega_1 t_n + \alpha),$$

$$q_{n+1} = A_0 e^{-\gamma(t_n+T)} cos(\omega_1(t_n + T) + \alpha) = A_0 e^{-\gamma t_n} e^{-\gamma T} cos(\omega_1 t_n + 2\pi + \alpha) = e^{-\gamma T} q_n.$$

Таким образом, отношение двух последовательных максимальных значений заряда остается постоянным в течение всего процесса. Натуральный логарифм этого отношения

$$\delta = ln\frac{q_n}{q_{n+1}} = \gamma T$$

принимают за меру затухания колебаний и называют **логарифмическим декрементом затухания.** Как мы показали, он равен произведению коэффициента затухания на период колебаний. Нетрудно также показать, что логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний N, после которого амплитуда уменьшается в e раз:

$$\delta = \frac{1}{N}.$$

Действительно, так как $A = A_0 e^{-\gamma t}$, то амплитуда уменьшается в e раз за время $t_1 = \frac{1}{\gamma}$, называемое часто **временем затухания**. За это время произойдет $N = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{\gamma T} = \frac{1}{\delta}$ колебаний.

Для характеристики затухания в колебательных системах, особенно в колебательных контурах, часто пользуются еще одной величиной, называемой **добротностью системы** и обозначаемой обычно Q. Она связана с логарифмическим декрементом затухания соотношением:

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\omega_1}{2\gamma}.$$

Так как $\delta = \frac{1}{N}$, то $Q = \pi N$. То есть добротность контура есть умноженное на π число полных колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в е раз. Очевидно, добротность контура тем выше, чем меньше затухание колебаний в нем.

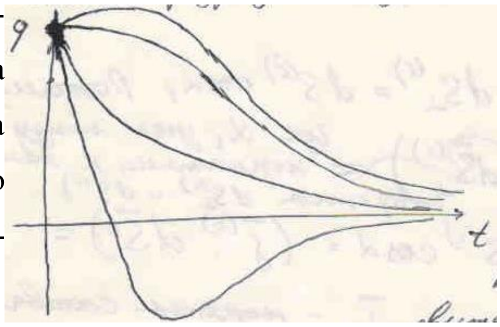
Формула для частоты затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

показывает, что она зависит от коэффициента затухания γ. Причем с увеличением γ частота уменьшается, а период колебаний T увеличивается. При некотором критическом сопротивлении контура R, когда $\gamma = \omega_0$, колебания не возникают вовсе. В этом случае заряд конденсатора **уменьшается апериодически** и **асимптотически** стремится к нулю. При дальнейшем увеличении сопротивления апериодичность движения сохраняется. Дело в том, что в этом случае подкоренное выражение в формуле для ω_1 становится отрицательным. Это означает, что решение исходного уравнения при $\gamma > \omega_0$ имеет другой вид:

$$q(t) = A_1 e^{(-\gamma+\omega_1)t} + A_2 e^{(-\gamma-\omega_1)t}, \qquad \omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2},$$

где значения постоянных величин A_1 и A_2 определяются начальными условиями. В зависимости от них, а также от параметров системы разряд конденсатора при столь сильном затухании будет происходить по закону, график которого имеет один из четырех характерных типов, приведенных на рисунке.



Рассмотрим теперь кратко затухающие механические колебания. Как известно, при движении тела в среде при малых скоростях силу сопротивления можно считать пропорциональной скорости тела:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -\beta\vec{V}.$$

Поэтому уравнение колебания груза на пружинке при наличии сопротивления воздуха будет иметь вид:

$$mx'' = -kx - \beta x', \text{ где } x' = \frac{dx}{dt} = V_x.$$

Нетрудно видеть, что его можно представить в виде, аналогичном уравнению колебаний заряда в колебательном контуре:

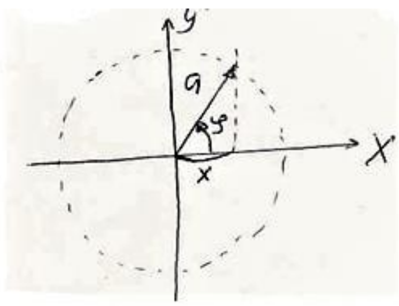
$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0.$$

Только теперь $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $2\gamma = \frac{\beta}{m}$. Таким образом, и при наличии затухания как механические, так и электрические колебания происходят по одинаковому закону и имеют одинаковые закономерности.

В заключение заметим, что описанный выше экспоненциальный характер затухания колебаний не является универсальным. Он наблюдается только в системах, для которых «обобщенная сила трения» пропорциональна «обобщенной скорости» ($\vec{F}_{\text{сопр}} \sim \vec{V}$, $V_R \sim I$ и т. п.), а точнее мощность потерь энергии пропорциональна квадрату «скорости» (например, по закону Джоуля-Ленца $P_R = I^2 R$). При другой зависимости потерь энергии от «скорости» (например, как при сухом трении) закон затухания колебаний будет иным.

Метод векторной диаграммы

Метод векторной диаграммы основан на том, что ***гармоническое колебание точки вдоль некоторой прямой можно представить как движение проекции на эту прямую конца равномерно вращающегося вектора***. Действительно, рассмотрим произвольную прямую X и вектор, имеющий длину a и составляющий с прямой X угол φ. Предположим, далее, что этот вектор равномерно вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω, так что:



$$\varphi = \omega t + \alpha,$$

где α - значение угла φ в момент времени t = 0.

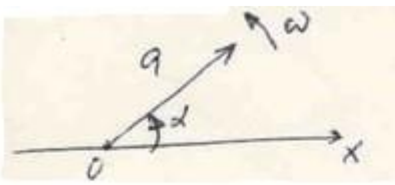
Тогда проекция рассматриваемого вектора на ось X выражается формулой:

$$x = a * cos(\omega t + \alpha),$$

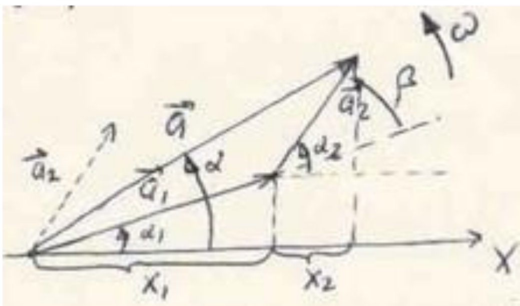
а проекция на перпендикулярную к ней ось Y – формулой:

$$y = a * sin(\omega t + \alpha).$$

Поэтому при *известной* и *постоянной частоте* колебаний ω мы полностью определим гармоническое колебание, если изобразим вектор длиной *a,* составляющий с выбранным положительным направлением оси X угол α.



Рассмотрим теперь сложение двух гармонических колебаний *одинаковой частоты*. Построим вектор, изображающий первое колебание. Его длина a_1 равна амплитуде колебаний, а угол α_1, составляемый с осью диаграммы, задает начальную фазу. Из конца этого вектора построим второй вектор, изображающий второе колебание, имеющее амплитуду a_2 и начальную фазу α_2. Угол $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ есть сдвиг фаз рассматриваемых колебаний. Проекция x_1 вектора $\vec{a}_1$ задает



первое колебание $x_1 = a_1 * cos(\omega t + \alpha_1)$, а проекция x_2 вектора $\vec{a}_2$ – второе колебание $x_2 = a_2 * cos(\omega t + \alpha_2)$. Сумма $x_1 + x_2$ есть сумма обоих колебаний. Но сумма проекций двух векторов равна проекции суммы обоих векторов. Поэтому вектор $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ представляет результирующее колебание. Заметим, что мы также доказали, что сумма гармонических колебаний одинаковой частоты есть гармоническое колебание той же частоты.

Из сказанного ясно, что при помощи описанного приема можно складывать какое угодно количество гармонических колебаний одинаковой частоты. Для этого нужно из конца второго вектора построить третий вектор, представляющий третье колебание, и т.д., и найти суммарный вектор, который и будет представлять суммарное колебание.

В предыдущих рассуждениях мы считали, что x (или y) обозначает смещение движущейся точки. Ясно, однако, что наши рассуждения и выводы из них полностью сохраняются и в том случае, если по оси X откладывается значение *любой* скалярной физической величины, изменяющейся по закону синуса или косинуса, поэтому метод векторных диаграмм пригоден для изображения и суммирования гармонических колебаний одной частоты любых скалярных величин.

Вынужденные механические колебания. Резонанс. Ширина резонансной кривой

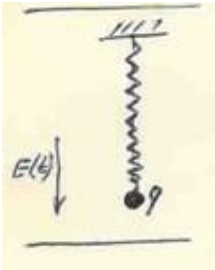
До сих пор мы рассматривали собственные колебания, т.е. колебания, происходящие в отсутствие изменяющихся со временем внешних воздействий (последнее было нужно лишь для того, чтобы вывести систему из состояния равновесия).

Однако часто приходится сталкиваться с колебаниями, происходящими при постоянно присутствующем изменяющемся во времени внешнем воздействии. Особенно важен и при этом достаточно прост для изучения случай, когда внешнее воздействие является периодическим. Общей чертой происходящих при этом вынужденных колебаний является то, что спустя некоторое время после начала внешнего периодического воздействия система "забывает" свое начальное состояние: колебания перестают зависеть от начальных условий и их период становится точно равным периоду внешнего воздействия. Начальные условия проявляются только в период установления колебаний, который обычно называют переходным процессом. Заметим, что продолжительность переходного процесса в какой-либо системе совпадает с характерным временем затухания $t_з$ собственных колебаний в этой же системе ($t_з \sim 1/\gamma$, где γ - коэффициент затухания).

Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая: вынужденных колебаний, происходящих под действием меняющейся по гармоническому закону внешней силы

$$F(t) = F_0 cos(\omega t).$$

Такое внешнее воздействие на систему можно осуществить, например, поместив прикрепленный к непроводящей пружинке заряженный шарик между вертикальными пластинами плоского конденсатора, на которые подается переменное гармоническое напряжение. Применяя к рассматриваемой системе второй закон Ньютона, получим следующее уравнение движения:



$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0 cos(\omega t),$$

где $F_0 = qE_0$, E_0 – амплитуда изменения электрического поля в конденсаторе, q – заряд шарика. Второе слагаемое в правой части – сила трения, пропорциональная скорости (например, сила сопротивления воздуха).

Разделим обе части уравнения на массу и введем обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad 2\gamma = \frac{\beta}{m}; \quad f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

В результате получим уравнение вынужденных колебаний следующего вида:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 cos(\omega t). \qquad (2)$$

В отсутствие вынуждающей силы правая часть полученного уравнения равна 0, и оно, естественно, совпадает с уравнением собственных затухающих колебаний (1). Нетрудно понять, что вынужденные колебания в любой системе, способной в отсутствии трения совершать собственные гармонические колебания, будут при наличии гармонической вынуждающей силы и сопротивления, пропорционального скорости, описываться таким же уравнением. Величина x при этом будет характеризовать отклонение системы от равновесного состояния, а постоянные коэффициенты γ, ω_0 и f_0 будут определяться параметрами конкретной системы. В дальнейшем мы рассмотрим несколько соответствующих примеров, а сейчас попробуем найти решение полученного уравнения.

Пользуясь методом векторной диаграммы (т.е. сопоставив каждому члену уравнения (2) вращающийся с угловой скоростью ω вектор, модуль которого равен амплитудному значению этого члена) нетрудно убедиться, что одно из его решений имеет вид

$$x_0(t) = b * cos(\omega t - \Theta),$$

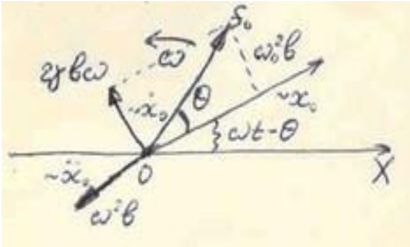
т.е. описывает гармоническое колебание с частотой вынуждающей силы. Чтобы воспользоваться методом векторной диаграммы, выпишем мгновенные значения всех членов левой части уравнения (2), в предположении, что $x = x_0(t)$:

$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 b * cos(\omega t - \Theta),$$

$$2\gamma\dot{x} = -2\gamma\omega b * \sin(\omega t - \Theta) = 2\gamma\omega b * \cos\left(\omega t - \Theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 b * cos(\omega t - \Theta) = \omega^2 b * cos(\omega t - \Theta + \pi).$$

Отсюда видно, что вектор длиной $2\gamma\omega b$, сопоставляемый члену уравнения $2\gamma\dot{x}$, опережает на угол $\pi/2$ вектор $\omega_0^2 b$, сопоставляемый величине $\omega_0^2 x$. Вектор $\omega^2 b$, сопоставляемый члену уравнения $\ddot{x}$, опережает на π вектор $\omega_0^2 b$, т.е. эти векторы направлены в противоположные стороны. Взаимное расположение этих векторов для произвольного момента времени показано на рисунке (вся система векторов вращается как целое с угловой частотой ω против часовой стрелки вокруг точки О; мгновенные значения всех величин получаются проецированием соответствующих векторов на заранее выбранное направление X). В силу уравнения (2) сумма этих трех векторов должна быть равна вектору длиной f_0, сопоставляемому правой части уравнения (2). Применяя определение тангенса и теорему Пифагора, из векторной диаграммы получим:



$$tg\Theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$${f_0}^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 b^2 + 4\gamma^2\omega^2 b^2, \text{ т.е. } b = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Итак, мы нашли одно из решений уравнения вынужденных колебаний. Нетрудно понять, что решением этого уравнения будет также функция

$$x(t) = x_0(t) + x_{\text{соб}}(t), \tag{3}$$

где $x_{\text{соб}}(t)$ описывает собственные затухающие колебания системы, т.е. является хорошо известным нам решением уравнения вида (1):

$$\ddot{x}_{\text{соб}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{соб}} + \omega_0^2 x_{\text{соб}} = 0.$$

Действительно:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underline{\ddot{x}_0} + \ddot{x}_{\text{соб}} + \underline{2\gamma\dot{x}_0} + 2\gamma\dot{x}_{\text{соб}} + \underline{\omega_0^2 x_0} + {\omega_0}^2 x_{\text{соб}} =$$

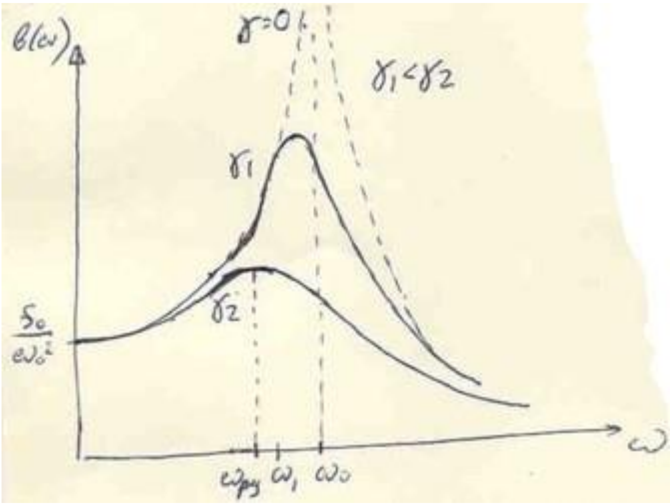
$$= (\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + (\ddot{x}_{\text{соб}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{соб}} + \omega_0^2 x_{\text{соб}}) = f_0 cos(\omega t).$$

В математике доказывается, что ***все*** решения уравнения (2) можно представить в виде (3).

С течением времени, однако, собственные колебания системы затухают ($x_{\text{соб}}(t) \to 0$ при $t \gg {}^1/_\gamma$, где γ – коэффициент затухания в системе). Поэтому мы можем утверждать, что найденное нами решение уравнения (2) $x_0(t)$ описывает ***установившиеся вынужденные колебания***, которые не зависят от начального состояния системы.

Рассмотрим полученные нами выражения для величин Θ и b более подробно.

Прежде всего, заметим, что амплитуда установившихся вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы f_0. Это является следствием линейности рассматриваемой нами системы, т.е. малости ее отклонения от положения равновесия. Более сложный характер имеет зависимость амплитуды колебаний от частоты ω вынуждающей силы. При малом затухании γ эта зависимость имеет очень резкий характер. Если $\gamma = 0$, то при стремлении ω к частоте собственных колебаний ω_0 амплитуда вынужденных колебаний $b(\gamma = 0) = \frac{f_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$ стремится к бесконечности. При наличии затухания амплитуда колебаний остается конечной при любой частоте внешнего воздействия. Однако она по-прежнему резко возрастает при частотах ω, близких к частоте собственных колебаний системы.



Это явление относительно большого избирательного отклика колебательной системы на гармоническое воздействие с частотой, близкой к частоте ее собственных колебаний, получило название ***резонанса***. А кривые зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы обычно называют ***резонансными кривыми***.

Резонансные кривые при разных значениях постоянной затухания γ приведены на рисунке. Для нахождения резонансной частоты $\omega_{рез}$ внешнего воздействия, при которой амплитуда колебаний имеет максимальное значение, нужно найти, при каком ω подкоренное выражение $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 = \omega^4 + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4$ в формуле для амплитуды b вынужденных колебаний имеет минимум. Нетрудно видеть, что это выражение представляет собой квадратный трехчлен относительно ω^2. Как известно, функция $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет минимум при $x = -b/2$. Следовательно

$$\omega_{рез}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2.$$

Заметим, что $\omega_{рез} < \omega_1 < \omega_0$, где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частота собственных затухающих колебаний в рассматриваемой системе. При малых γ резонансная частота почти совпадает с ω_1 и ω_0.

При стремлении частоты вынуждающей силы к бесконечности, т.е. при $\omega \gg \omega_0$

$$b(\omega) \approx \frac{f_0}{\omega^2} \rightarrow 0.$$

При $\omega = 0$, т.е. при действии постоянной внешней силы, величина $b_{ст} = f_0/\omega_0^2$. Если подставить сюда $f_0 = F/m$ и $\omega_0^2 = k/m$, то получим: $b_{ст} = F_0/k$ – статическое смещение осциллятора из положения равновесия под действием постоянной силы F_0.

Амплитуду вынужденных колебаний в резонансе $b_{\text{рез}}$ находим, подставляя частоту $\omega_{\text{рез}}$ в выражение для b:

$$b_{\text{рез}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_{\text{рез}}^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega_1}.$$

Таким образом, действительно амплитуда колебаний в резонансе тем больше, чем меньше постоянная затухания γ. Поэтому при изучении вынужденных колебаний вблизи резонанса трением пренебрегать нельзя, как бы мало оно ни было: только при учете затухания амплитуда в резонансе получается конечной. Интересно сравнить значение $b_{\text{рез}}$ со статическим смещением под действием силы F_0. Очевидно

$$\frac{{\omega_0}^2}{{\omega_1}^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{{\omega_1}^2},$$

$$\frac{b_{\text{рез}}}{b_{\text{ст}}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega_1} : \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{2\gamma\omega_1} = \frac{\omega_1}{2\gamma}\cdot\frac{\omega_0^2}{{\omega_1}^2} = Q\left(1 + \frac{4\gamma^2}{4{\omega_1}^2}\right) = Q + \frac{1}{4Q}.$$

где Q – добротность системы. При малом затухании ($\gamma \ll \omega_0,\ Q \gg 1$):

$$\frac{b_{\text{рез}}}{b_{\text{ст}}} \approx Q.$$

Таким образом, резонансные свойства системы характеризуются тем же параметром (добротностью Q), что и скорость затухания собственных колебаний.