Колебания. Часть 1

Кинематика колебаний. Механические колебания

Колебательное движение. Гармонические колебания

Определение. Колебания — это движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебания свойственны всем явлениям природы: пульсирует излучение звёзд; с высокой степенью периодичности вращаются планеты Солнечной системы; ветры возбуждают колебания предметов на поверхности водоёмов.

Определение. Движение (процесс) называется *периодическим*, если спустя некоторое постоянное время после любого момента времени оно точно повторяется.

Периодическое движение является частным случаем колебаний.

Определение. Минимальный промежуток времени Т, через который периодическое движение (процесс) полностью повторяется, называется *периодом колебаний*.

Зная период, можно определить ***частоту колебаний***, то есть число колебаний в единицу времени. Если одно колебание совершается за время Т, то число колебаний за единицу времени, очевидно, равно

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Единица измерения частоты в СИ называется ***герцем*** (Гц) в честь немецкого физика Генриха Герца: колебание имеет частоту 1 Гц, если в секунду совершается 1 колебание.

Важное место в физике занимают так называемые ***гармонические колебания***: изменения физической величины со временем, происходящие по закону синуса или косинуса.

Рассмотрим для определённости гармонические изменения координаты (например, координаты грузика на пружинке). При этом зависимость координаты от времени в общем случае может иметь вид:

$$x = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = x_0 + A\sin(\omega_0 t + \varphi_0'), \quad \varphi_0' = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}.$$

Определение. *Амплитудой гармонических колебаний* называется модуль наибольшего отклонения изменяющейся величины от своего среднего за период значения.

То есть амплитуда по определению есть величина положительная.

В приведённом примере x_0 – среднее значение величины x, а A – амплитуда её гармонических колебаний, так как максимальные по модули значения синуса и косинуса равны единице, а их средние за период значения равны нулю.

По определению периода Т, через промежуток времени, равный Т, то есть при увеличении аргумента косинуса (синуса) на $\omega_0 T$ косинус (синус) должен принимать прежнее значение. Следовательно, $\omega_0 T = 2\pi$, то есть

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Таким образом, величина ω_0 – это число колебаний рассматриваемой величины за 2π единиц времени (в СИ – за 2π секунд). Она называется ***циклической*** или круговой ***частотой.***

При заданной амплитуде A гармонического колебания координаты (или любой другой величины) и известном её среднем значении x_0 значение координаты колеблющегося тела в любой момент времени t однозначно определяется аргументом косинуса или синуса $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ в этот момент времени.

Определение. Величину, стоящую под знаком косинуса или синуса, называют ***фазой гармонических колебаний***, описываемых этими функциями.

Сдвигом фаз двух гармонических колебаний одинаковой частоты, выраженных через одну и ту же тригонометрическую функцию, называется разность фаз этих колебаний.

Начальной фазой φ_0 называется фаза колебаний в начальный момент времени $t = 0$.

Очевидно, что изменение начальной фазы на $2\pi N$ (N – любое целое число) не меняет соответствующие гармонические колебания, т.е. начальная фаза колебаний всегда определена с точностью до $2\pi N$.

Пример. Два тела совершают колебания, описываемые следующими функциями:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_0 t); \qquad x_2 = A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2).$$

Какие из этих колебаний являются гармоническими? Для гармонических колебаний найдите их амплитуду, период, а также начальную фазу. Можно ли говорить о сдвиге фаз между этими колебаниями?

Решение. Преобразуем формулу для смещения первого тела x_1:

$$\begin{aligned} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_0 t) = \\ &= A_1[\cos\varphi_1 * \cos(\omega_0 t) - \sin\varphi_1 * \sin(\omega_0 t)] + B_1 \sin(\omega_0 t) = \\ &= (A_1 \cos\varphi_1) * \cos(\omega_0 t) + (B_1 - A_1 \sin\varphi_1) * \sin(\omega_0 t) = \\ &= A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

Здесь $A_0 = \sqrt{(A_1 \cos\varphi_1)^2 + (B_1 - A_1 \sin\varphi_1)^2} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \sin\varphi_1}$ – амплитуда гармонических колебаний первого тела, φ – их начальная фаза. Причём $\sin\varphi = A_1 \cos\varphi_1 / A_0$, $\cos\varphi = (B_1 - A_1 \sin\varphi_1)/A_0$. Период колебаний первого тела равен $2\pi/\omega_0$. Для второго тела всё проще: A_2 – амплитуда; φ_2 – начальная фаза; π/ω_0 – период. Таким образом, оба колебания являются гармоническими, но так как они имеют разные частоты, то о ***сдвиге фаз*** между ними говорить нельзя. Иногда, правда, говорят о ***разности фаз*** гармонических колебаний разных частот, которая зависит от времени. Однако эта величина является физически полезной только в случае колебаний близких частот.

Пример. Найти разность фаз колебаний $x_1 = A\cos\omega_0 t$ и $x_2 = B\sin\omega_0 t$.

Решение. Так как $\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, то $x_1 = A\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, колебания первого тела опережают колебания второго на $\frac{\pi}{2}$.

При гармонических колебаниях координаты тела, его скорость и ускорение также меняются гармонически. Действительно, по определению, если $x = x_0 + A\cos\omega_0 t$, то

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0\, A\sin\omega_0 t = \omega_0\, A\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega_0{}^2 A\cos\omega_0 t = \omega_0{}^2 A\cos(\omega_0 t + \pi).$$

Очевидно, что $a_x = 0$, когда $\cos\omega_0 t = 0$, то есть при $x = x_0$. Следовательно, x_0 не только имеет смысл среднего за период значения координаты, но и ***соответствует положению равновесия тела***.

Из полученных формул для скорости и ускорения также следует, что при гармонических колебаниях:

1) Скорость опережает смещение по фазе на $\frac{\pi}{2}$. В частности в момент, когда координата равна нулю, модуль скорости максимален, и, наоборот.

2) Амплитуда v_0 колебаний скорости следующим образом выражается через амплитуду A колебаний смещения

$$v_0 = \omega_0\, A.$$

3) Колебания ускорения сдвинуты по фазе относительно колебаний координаты на π. То есть когда координата принимает максимальное (минимальное) значение, ускорение достигает минимума (максимума). В таких случаях говорят, что колебания происходят **в противофазе**.

4) Амплитуда a_M колебаний ускорения связана с амплитудами колебаний смещений A и скорости v_0 следующими соотношениями

$$a_M = \omega_0^2 A = \omega_0 v_0.$$

Условия возникновения свободных колебаний

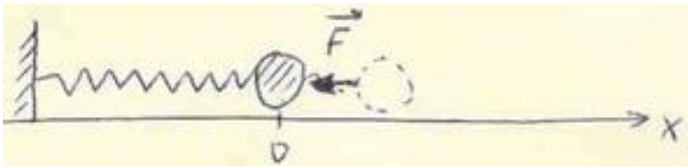
Самым простым видом колебаний являются колебания, возникающие в физической системе под действием внутренних сил (процессов) после того, как система была выведена из положения равновесия и предоставлена сама себе. Такие колебания называются ***сво-***

бодными, в том смысле, что они происходят *без воздействия внешних периодически меняющихся сил (воздействий)*. Частоту свободных колебаний системы обычно называют ***собственной частотой системы***.

Колебания груза на пружине – пример свободных колебаний. Если же мы начнём двигать рукой вперёд-назад книгу на столе или тот же грузик на пружине, то книга и грузик тоже будут совершать колебания, но эти колебания не будут свободными.

Колебания, совершаемые телами под действием периодически изменяющихся внешних сил (воздействий), называются ***вынужденными***.

Выясним, какими свойствами должна обладать система, чтобы в ней могли возникнуть свободные колебания. В качестве примера рассмотрим горизонтальные колебания шарика на пружине (вся система находится на гладкой горизонтальной поверхности).



Если сместить шарик из положения равновесия вправо, то на него начнёт действовать сила $\vec{F}$ со стороны пружины. Эта сила согласно закону Гука пропорциональна деформации пружины и направлена влево. Под её действием шарик начнёт двигаться с ускорением влево, увеличивая скорость. Когда шарик достигнет положения равновесия, сила упругости пружины станет равной нулю. Значит, станет равным нулю и ускорение шарика. Но к этому моменту скорость шарика уже достигнет некоторого значения. Из-за инертности, не останавливаясь в положении равновесия, шарик будет продолжать двигаться влево. Пружина при этом укорачивается. В результате появляется сила упругости, направленная уже вправо и тормозящая движение шарика. Эта сила, в конечном счёте, останавливает шарик в крайнем левом положении. После этого шарик под её действием начнёт ускоренно двигаться вправо и так далее.

Если бы не существовало трения, то движение шарика не прекратилось бы никогда. Однако трение (в частности, сила сопротивления воздуха) есть, направлено оно противоположно скорости и поэтому тормозит движение шарика. Размах его колебаний постепенно уменьшается до тех пор, пока движение не прекратится.

При малом трении затухание становится заметным лишь после того, как шарик совершит много колебаний. Поэтому, если интересоваться движением шарика на протяжении не очень большого интервала времени, то затуханием его колебаний можно пренебречь, а силу сопротивления не учитывать.

Если же сила сопротивления велика, то пренебречь её действием даже на малых интервалах времени нельзя. Если опустить шарик на мягкой пружине (k – мало) в очень вязкую жидкость (например, глицерин), то выведенный из положения равновесия шарик совсем не будет колебаться. Под действием силы упругости он просто вернётся в положение равновесия. Дело в том, что из-за действия силы сопротивления его скорость в положении равновесия будет практически равно нулю.

Теперь мы можем сформулировать, что же является существенным для того, чтобы в системе могли возникнуть свободные колебания.

1) При выведении тела (системы) из положения равновесия должна возникнуть сила (силы, процессы), стремящиеся вернуть его (её) в положение равновесия. То есть положение равновесия должно быть устойчивым.

2) Потери энергии за период колебаний в системе должны быть достаточно малыми (по сравнению с первоначальным превышением энергии системы над её энергией в положении равновесия).

Оба условия являются совершенно общими, справедливыми для любой системы, в которой могут возникнуть свободные колебания.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Пусть некоторая величина S совершает гармонические колебания по закону

$$S(t) = x_0 + Acos(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$$

где x_0 — среднее за период значение величины S, A – амплитуда, ω – циклическая частота и φ_0 – начальная фаза колебаний. Тогда вторая производная функции $S(t)$ равна

$$S'' = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi_0).$$

Из последних двух равенств получаем

$$S'' + \omega^2 S = \omega^2 x_0. \tag{2}$$

То есть можно сделать вывод: если величина S совершает гармонические колебания (1), то она удовлетворяет уравнению (2). Можно доказать и обратное: если для функции $S(t)$ справедливо равенство (2) в некотором диапазоне значений t, то при этих t величина S меняется по закону (1). Поэтому уравнение (2) называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний или просто **уравнением гармонических колебаний**.

Из сказанного следует важное утверждение: ***если для величины S удалось получить дифференциальное уравнение вида (2), то это означает, что S изменяется по закону (1) с циклической частотой ω и имеет среднее за период значение $\boldsymbol{x_0}$.*** При этом A и φ_0 в (1) являются произвольными постоянными. Чтобы найти их значения в конкретных задачах необходимо знать так называемые начальные условия: значения S и ее первой производной S' в некоторый момент времени t_0 (часто t_0 = 0). Действительно, пусть известно, что $S(0) = s_0$, $S'(0) = v_0$. Тогда в силу (1) имеем:

$$s_0 - x_0 = Acos\varphi_0, \qquad \frac{v_0}{\omega} = -Asin\varphi_0. \tag{3}$$

Возводя оба равенства в квадрат и складывая, с учетом основного тригонометрического тождества получим:

$$A = \sqrt{(s_0 - x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

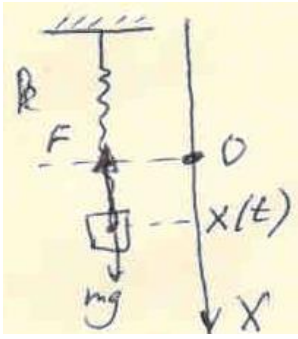
Подставляя найденную амплитуду в (3), найдем косинус и синус начальной фазы:

$$s_0 - x_0 = Acos\varphi_0, \qquad \frac{v_0}{\omega} = -Asin\varphi_0,$$

которые определяют начальную фазу колебаний с точностью до 2πN, то есть физически однозначно.

Колебания груза на пружине. Математический маятник. Квазиупругая сила. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Энергия колебаний

Пример. На легкой пружине жесткостью k подвешен груз массой m. Покажите, что вертикальные колебания груза гармонические, и найдите их период.



Решение. Направим ось X вниз. Начало координат поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза, в котором пружина растянута по сравнению с ненапряженным состоянием на величину x_0. Очевидно, что

$$kx_0 = mg. \qquad (4)$$

В этом примере колеблющейся величиной является координата груза x.

1 способ. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось X. Учитывая, что проекция силы упругости, действующей на груз со стороны пружины, равна $F_x = -k(x_0 + x)$, получим:

$$mx'' = F_x + mg = -kx_0 - kx + mg = -kx.$$

Заметим, что в правую часть не вошла постоянная внешняя сила mg. Перенося все слагаемые в одну сторону и разделив уравнение на массу груза m, окончательно имеем:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Видно, что это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, то есть с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2 способ. Используем закон сохранения энергии. За нулевой уровень потенциальной энергии груза в поле тяжести возьмем положение равновесия. Полная механическая энергия колебаний системы представляет собой сумму кинетической энергии груза $mv^2/2 =$

$m(x')^2/2$, потенциальной энергии груза в поле тяжести $mg(-x)$ и потенциальной энергии деформации пружины $k(x+\ x_0)^2/2$. Так как работа непотенциальных сил над системой равна нулю, то ее полная механическая энергия при колебаниях должна сохраняться:

$$\frac{m(x')^2}{2}+\frac{k(x+\ x_0)^2}{2}-\ mgx=const.$$

Раскрывая скобки во втором слагаемом и приводя подобные члены с учетом (4), получим:

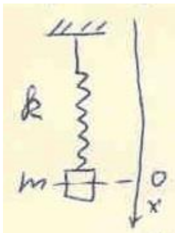
$$\frac{m(x')^2}{2}+\frac{kx_0^2+\ kx^2}{2}=const.$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$mx'x''+kxx'=0.$$

Если функция x' не равна тождественно нулю (то есть груз движется), то после деления на mx' получим такое же уравнение для функции x, как и в первом способе:

$$x''+\frac{k}{m}x=0.$$



Пример. На легкой пружине жесткостью k подвешен груз массой m. Груз отклоняют от положения равновесия на расстояние $x_н$ и сообщают ему скорость $v_н$. Найдите амплитуду колебания груза.

Решение. Из предыдущего примера мы знаем, что груз будет совершать гармонические колебания относительно положения равновесия:

$$x=Acos(\omega t+\varphi_0);\qquad v=\frac{dx}{dt}=\ -A\omega sin(\omega t+\ \varphi_0),\qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

1 способ. Воспользуемся начальными условиями:

$$x_{н}=x(0)=Acos\varphi_0,\qquad v_{н}=v(0)=-A\omega sin\varphi_0.$$

Откуда

$$(Acos\varphi_0)^2+(Asin\varphi_0)^2=x_н^2+\left(\frac{v_н}{\omega}\right)^2,\ \text{ т.е. }\quad A=\sqrt{x_н^2+\left(\frac{v_н}{\omega}\right)^2}=\sqrt{x_н^2+\frac{m}{k}v_н^2}.$$

2 способ. Воспользуемся законом сохранения энергии (подробнее см. предыдущий пример):

$$\frac{m(x')^2}{2}+\frac{kx_0^2+\ kx^2}{2}=W_0=\ const.$$

Значение энергии W_0 найдем из начальных условий (когда $x=x_н,\ v=v_н$):

$$W_0=\frac{mv_н{}^2}{2}+\frac{kx_0^2+\ kx_н^2}{2}.$$

Когда функция x принимает максимальное или минимальное значение, её производная по времени равна нулю ($x'=0$). Для этого случая из закона сохранения имеем:

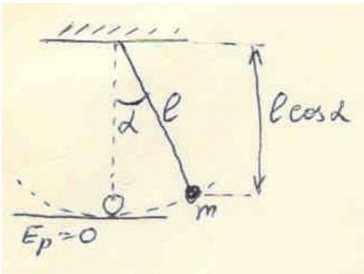
$$\frac{kx_0^2 + kx_m^2}{2} = \frac{mv_н{}^2}{2} + \frac{kx_0{}^2}{2} + \frac{kx_н^2}{2}.$$

Следовательно, $kx_m^2 = mv_н^2 + kx_н^2$ или $x_m = \pm\sqrt{\frac{m}{k}v_н^2 + x_н^2}$. Таким образом, амплитуда колебаний груза $A = |x_m| = \sqrt{\frac{m}{k}v_н^2 + x_н^2}$.

Исследуем теперь малые колебания математического маятника. В самом общем случае **маятником** называют твердое тело, совершающее под действием приложенных сил колебания около неподвижной точки или вокруг оси. Обычно (в более узком смысле) под маятником понимают тело, совершающее колебания под действием силы тяжести; при этом ось маятника не должна проходить через центр тяжести тела. В противном случае тело будет находиться в положении безразличного равновесия и не будет совершать никаких колебаний. Маятником можно называть линейку, подвешенную на гвоздь, люстру и т.п.

Простейший маятник состоит из небольшого массивного груза, подвешенного на нити (или легком стержне) длиной l. Если размеры груза много меньше длины нити, то ими можно пренебречь. Для достаточно жесткой нити растяжением нити также можно пренебречь ($\Delta x = \frac{mg}{k} << l$, т.е. $\frac{m}{k} << \frac{l}{g}$). Для достаточно легкой нити ее массой по сравнению с массой груза также можно пренебречь. В этом случае вместо реального маятника можно рассматривать простую модель: материальную точку, подвешенную на нерастяжимой невесомой нити. Такая модель маятника называется **математическим маятником**.

Пример. Найдите период малых колебаний математического маятника длиной l в однородном поле тяжести g.



Решение. За колеблющуюся физическую величину удобно взять угол α отклонения нити от вертикали (α > 0, если маятник отклонен вправо от положения равновесия).

Угловая скорость шарика равна $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$, его линейная скорость – $v = \alpha' l$, а кинетическая энергия $E_k = mv^2/2 = ml^2(\alpha')^2/2$.

Если за нулевой уровень потенциальной энергии взять уровень, соответствующий положению шарика при равновесии маятника, то потенциальная энергия шарика в момент отклонения нити на угол α будет равна:

$$E_p(\alpha) = mgl(1 - cos\,\alpha) = 2mglsin^2\frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{2}mgl\alpha^2,$$

т.к. для малых углов $sin\alpha \approx \alpha$, если α измеряется в радианах. Полная энергия системы $E_p + E_k$ при колебаниях сохраняется. Поэтому

$$\frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = const.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{ml^2 \ \cdot 2\alpha'\alpha''}{2} + \frac{mgl \cdot 2\alpha\alpha'}{2} = 0.$$

Если функция α' не равна тождественно нулю (то есть груз движется), то после сокращения на $ml^2\alpha'$, очевидно, получим:

$$\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Следовательно, малые колебания математического маятника имеют период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Эта формула была впервые получена и проверена на опыте голландским ученым Гюйгенсом, современником Ньютона.

Замечательным является то, что период колебаний тела на пружине и период колебаний маятника при малых углах отклонения не зависят от амплитуды колебаний. Нетрудно заметить, что этим свойством будут обладать все колебания, при которых сила, направленная к положению равновесия, пропорциональна величине отклонения тела от положения равновесия. Такие силы часто называют **квазиупругими**, т.к. аналогичным свойством обладают силы, возникающие при малых деформациях упругих тел.

Заметим также, что с энергетической точки зрения процесс колебаний сопровождается периодическим изменением кинетической и потенциальной энергии системы. Полная же механическая энергия системы, в которой отсутствуют силы сопротивления, остается согласно закону сохранения энергии неизменной. Она равна либо потенциальной энергии в момент максимального отклонения от положения равновесия, либо кинетической энергии в момент, когда тело проходит положение равновесия. ***Последнее, однако, выполняется только, если за нулевой уровень потенциальной энергии взять уровень, соответствующий положения равновесия системы.*** Именно в этом случае полную механическую энергии колебательной системы часто называют **энергией колебаний**.