Лекция 4

Диэлектрическая проницаемость. Электроёмкость и энергия конденсаторов

Вектор поляризации диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость среды

Для количественной характеристики поляризации диэлектрика служит специальная величина, называемая вектором поляризации. ***Вектором поляризации диэлектрика*** называют отношение векторной суммы электрических дипольных моментов всех молекул, заключенных в некотором объеме ΔV диэлектрика, к величине этого объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_j \vec{p_j}.$$

Опыт показывает, что для не слишком сильных электрических полей вектор поляризации линейно зависит от напряженности $\vec{E}$ электрического поля в диэлектрике. В простейшем случае изотропных диэлектриков (то есть диэлектриков, величина поляризуемости которых не зависит от направления вектора $\vec{E}$) эту связь можно записать в виде:

$$\vec{P} = æ\varepsilon_0\vec{E},$$

где æ называют **диэлектрической восприимчивостью вещества**. Если æ не зависит от координат, то такой диэлектрик называют *однородным*.

Важную роль в электростатике и электродинамике играет величина $\varepsilon = 1 + æ$, называемая (**относительной) диэлектрической проницаемостью вещества**. Дело в том, что оказывается справедливо следующее утверждение:

Напряженность электрического поля, создаваемого любой системой точечных зарядов или проводников ***с фиксированной величиной зарядов*** *в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε,* ***занимающем все пространство, где есть поле, в ε раз меньше, чем поле этой же системы зарядов и проводников в вакууме***. Очевидно, что при одинаковом выборе нулевой точки потенциал любой точки поля в описанной выше ситуации при наличии диэлектрика также в ε раз меньше, чем при его отсутствии.

Замечание. Можно также доказать, что если в сформулированном выше утверждении однородный изотропный диэлектрик занимает только **часть области**, где есть поле, но эта часть **ограничена эквипотенциальной поверхностью**, то по сравнению со случаем отсутствия диэлектрика поле вне диэлектрика не изменится, а поле внутри диэлектрика уменьшится в ε раз.

Электроемкость уединенного проводника

Рассмотрим уединенный проводник, то есть проводник расположенный достаточно далеко от всех других заряженных и незаряженных тел. Поместим на него заряд q. Он распределится по поверхности проводника каким-то образом (так, что поле в проводнике равно нулю) и создаст во всем пространстве некоторое поле $\vec{E}(r)$, и, значит, точки проводника будут иметь некоторый одинаковый потенциал ф. Поместим теперь на проводник еще такой же заряд q. По теореме единственности он распределится так же, как и предыдущий заряд. В результате поле во всем пространстве удвоится, следовательно, удвоится и потенциал проводника. Из сказанного следует, что **отношение заряда уединенного проводника к его потенциалу не зависит от заряда проводника**. Это позволяет ввести понятие электроемкости (или просто емкости) C уединенного проводника, которая равна отношению заряда проводника к его потенциалу:

$$\mathrm{C} = q/\mathrm{ф}$$

Из сказанного выше следует, что емкость уединенного проводника определяется исключительно его формой и геометрическими размерами.

Из определения следует, что единица измерения емкости

$$\frac{1\ \text{Кл}}{1\ \text{В}} = 1\text{ф} - \text{фарада}$$

Иными словами, емкостью в один фарад обладает такой уединенный проводник, потенциал которого при сообщении ему заряда 1 Кл равен 1 В.

Нетрудно понять, что емкость уединенного сферического проводника

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

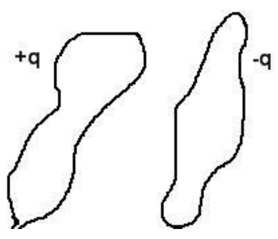
где R – радиус сферы (т.к. $\text{ф} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$).

Приведенные рассуждения сохраняют свою силу и в том случае, если проводник окружен другими ***незаряженными*** телами. Однако наличие вблизи проводника других тел, и, в частности диэлектриков, изменяет его емкость, так как потенциал проводника зависит и от электрических полей, создаваемых зарядами, наведенными в окружающих телах в следствие электростатической индукции или поляризации. В частности, емкость проводящей сферы радиуса R, помещенной в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε увеличивается в ε раз:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$$

(так как поле вокруг сферы, и, следовательно, ее потенциал, уменьшаются в ε раз).

Взаимная электроемкость двух проводников. Конденсаторы



Рассмотрим теперь систему из двух проводников *в отсутствии внешнего электрического поля*. Сообщим им равные по модулю заряды противоположного знака. В результате между проводниками возникнет разность потенциалов. Рассуждая так же, как в случае одного проводника, нетрудно понять, что отношение заряда q к разности потенциалов между проводниками $(\phi_1 - \phi_2)$ не зависит от величины q. Это отношение, точнее его модуль, называют **взаимной емкостью двух проводников**:

$$C = \left|\frac{q}{(\phi_1 - \phi_2)}\right|$$

Так как силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных, а потенциал, как следует из его определения, уменьшается при движении по направлению силовых линий, то $|\phi_1 - \phi_2| = \phi_+ - \phi_-$, где ϕ_+ потенциал проводника, заряженного положительно, а ϕ_- – отрицательно. Поэтому:

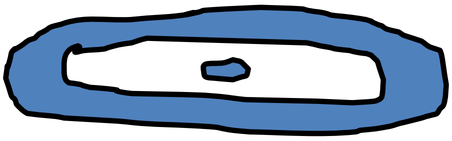
$$C = \frac{|q|}{\phi_+ - \phi_-} = \frac{q}{\phi_q - \phi_{-q}}.$$

Взаимная емкость двух проводников зависит от их формы, размеров и взаимного расположения, а также от среды, в которой они находятся.

Определение. Конденсатором называется система двух разноименных заряженных равными по абсолютной величине зарядами проводников, имеющих такую форму и расположение друг относительно друга, что поле, создаваемое такой системой, сосредоточено в ограниченной области пространства. Сами проводники при этом называются обкладками конденсатора.

Электроемкостью конденсатора называется взаимная емкость его обкладок.

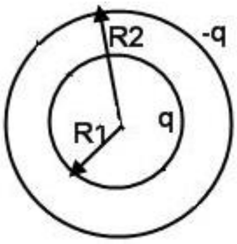
Примером конденсатора является любой полый проводник, в полости которого находится другой проводник. При этом полость между проводниками может быть заполнена каким-нибудь диэлектриком.



Емкость плоского и сферического конденсаторов

Наиболее часто используются плоские и сферические конденсаторы.

Сферический конденсатор состоит из двух проводящих концентрических сфер, пространство между которыми может быть заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Такая система создает не равное нулю поле только между обкладками, причем это поле равно полю точечного заряда, уменьшенному в ε раз:



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}.$$

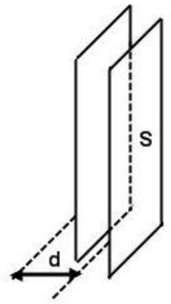
Соответственно $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r} + C_0$, и $\phi_+ - \phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2 R_1}$.

Поэтому емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{|q|}{\phi_+ - \phi_-} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}.$$

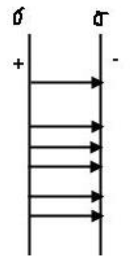
Видно, что при наличии диэлектрика емкость возрастает (для всех диэлектриков $\varepsilon > 1$). Однако, наличие диэлектрика может уменьшать напряжение пробоя конденсатора – разность потенциалов между обкладками, при которой происходит электрический пробой слоя диэлектрика.

Часто используется также **плоский конденсатор**, состоящий из двух проводящих параллельных пластин одинаковой формы (площади S), расположенных напротив друг друга на расстоянии d, малом по сравнению с поперечными размерами пластин. Поэтому электрическое поле между пластинами приближенно равно



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma = \frac{|q|}{S}$ – модуль поверхностной плотности заряда на каждой из пластин. Следовательно

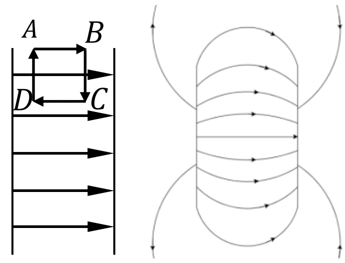


$$\phi_+ - \phi_- = Ed = \frac{|q|d}{\varepsilon_0 S},$$

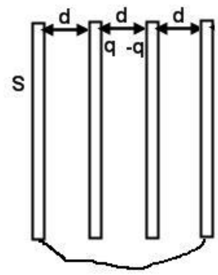
и, значит, емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Если плоский конденсатор, обкладки которого имеют заряды фиксированной величины, полностью заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то поле и разность потенциалов между обкладками уменьшатся в ε раз, и, значит, емкость плоского конденсатора увеличится в ε раз.

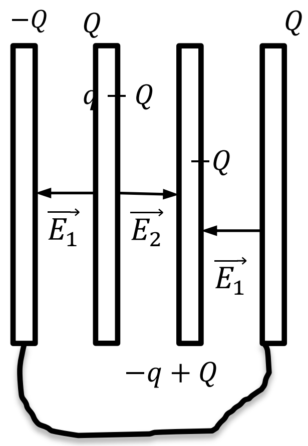


Подчеркнём, что модель плоского конденсатора, в которой считается, что электрическое поле однородно в области между пластинами и равно нулю вне этой области, имеет ограниченную применимость. Дело в том, что электростатическое поле в такой модели является не потенциальным: работа по замкнутому контуру ABCD (см. рисунок) не равна нулю, что невозможно. На самом деле электростатическое поле вблизи краев плоского конденсатора неоднородно и вне границ конденсатора поле не равно нулю, хоть и очень слабое. Нетрудно понять, что модель плоского конденсатора работает тем лучше, чем меньше отношение $\frac{d^2}{S}$. Однако в ряде случаев краевыми эффектами нельзя полностью пренебречь ни при каких условиях.



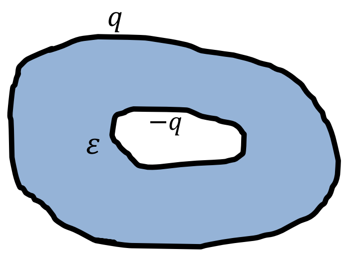
Пример. Четыре первоначально незаряженные одинаковые пластины поместили на расстоянии d друг от друга. Две средних пластины зарядили зарядами +q и –q. А две крайние соединили проводником. Чему будут равны заряды на крайних пластинах ($d^2 \ll S$).

Решение. Если пользоваться моделью плоского конденсатора, то, казалось бы, крайние пластины просто “не узнают” о том, что средние пластины зарядили (поле снаружи от средних пластин в этой модели равно нулю). Однако на самом деле все не так из-за описанных выше краевых эффектов. В результате правая пластина окажется заряженной положительно, а левая – отрицательно. Величину заряда найдем из условия, что крайние пластины имеют одинаковый потенциал:



$$\begin{cases} E_1 d - E_2 d + E_1 d = 0 \\ E_1 = \frac{Q}{S\varepsilon_0}, E_2 = \frac{q-Q}{S\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_2 = 2E_1 \\ q - Q = 2Q \end{cases} \Rightarrow Q = q/3$$

Расчет емкости конденсатора в случае обкладок произвольной формы является достаточно сложной задачей. Однако, и в этом случае заполнение всего пространства между обкладками диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε приводит к увеличению емкости конденсатора в ε раз (за счет уменьшения в ε раз поля и, следовательно, разности потенциалов между обкладками).



Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.

Система, полученная в результате соединения пластин нескольких конденсаторов проводниками (пренебрежимо малой емкости), называется **батареей конденсаторов**. В ряде случаев батарею конденсаторов можно описать как один конденсатор емкостью С.

Если в системе двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 пластины разных конденсаторов соединены попарно (батарея содержит два изолированных проводника), то такое соединение называется **параллельным**. Два (и более) параллельно соединенных конденсатора **всегда** можно описать как один конденсатор некоторой емкостью С. В этом случае общим для всех конденсаторов является разность потенциалов между обкладками $\Delta\phi$, и мы имеем:

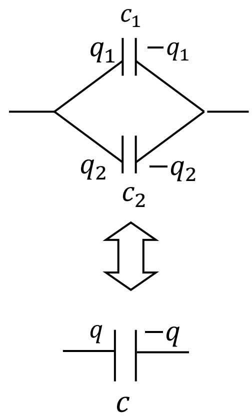
$$q_1 = C_1 \Delta\phi, \quad q_2 = C_2 \Delta\phi.$$

Поэтому суммарный заряд, находящийся на батарее, равен

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\Delta\phi.$$

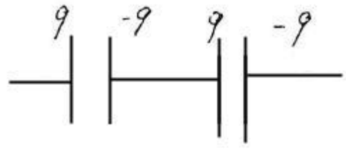
И, следовательно, емкость батареи

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = C_1 + C_2.$$



Итак, ***емкость батареи конденсаторов, соединенных параллельно, равна сумме емкостей отдельных конденсаторов***.

Если у двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 соединена одна пара пластин (батарея содержит три изолированных проводника), то такое соединение конденсаторов называется **последова-**



тельным. *Последовательно соединенные конденсаторы можно рассматривать как новый конденсатор только, если соединенные между собой обкладки в целом электронейтральны*!

В этом случае одинаковым для всех конденсаторов является заряд q, равный заряду батареи, и мы можем написать

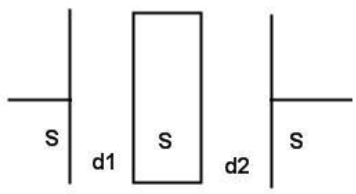
$$\Delta\phi_1 = \frac{q}{C_1},\ \ \Delta\phi_2 = \frac{q}{C_2},\ \ \Delta\phi = \frac{q}{C}.$$

Но $\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \ \Delta\phi_2 = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})$. Поэтому

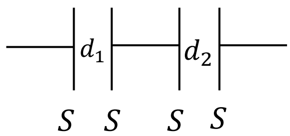
$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta\phi}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Итак, ***при последовательном соединении конденсаторов суммируются обратные величины емкостей***. Еще раз подчеркну: *это справедливо только, если полный заряд на каждой паре соединенных между собой обкладок конденсаторов равен нулю*!

Пример А. Плоский конденсатор с пластинами площадью S, расположенными на расстоянии d_0 друг от друга, заряжен до разности потенциалов ϕ_0. Какой станет разность потенциалов между обкладками конденсатора, если в него внести металлическую незаряженную пластину толщиной d и той же площади S?



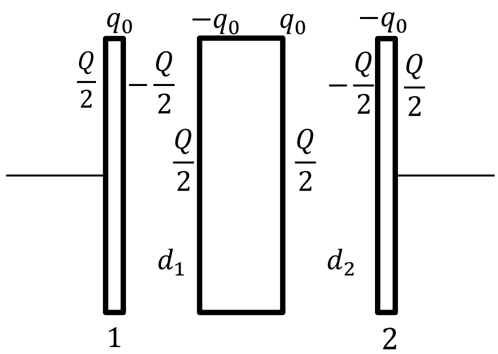
Решение. Емкость плоского конденсатора $C_0 = \frac{S\varepsilon_0}{d_0}$. Следовательно, заряд на его обкладках $q_0 = C_0\phi_0 = \frac{S\varepsilon_0}{d_0}\phi_0$. После внесения пластины мы получаем батарею из двух последовательно соединенных конденсаторов, поэтому:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{S\varepsilon_0} + \frac{d_2}{S\varepsilon_0} = \frac{d_1 + d_2}{S\varepsilon_0} = \frac{d_0 - d}{S\varepsilon_0}.$$

Откуда ёмкость батареи $C = \frac{S\varepsilon_0}{d_0 - d}$. Поскольку заряд батареи q_0, то искомая разность потенциалов:

$$\Delta\phi_1 = \frac{q_0}{C} = \frac{S\varepsilon_0}{d_0}\phi_0\frac{d_0 - d}{S\varepsilon_0} = \frac{d_0 - d}{d_0}\phi_0.$$



Пример Б. Пусть все будет как в примере А, но внесенная пластина заряжена зарядом Q.

Решение. В этом случае, пользуясь теоремой единственности, получаем, что заряды распределятся на проводниках так, как показа на рисунке. Поэтому разность потенциалов между обкладками 1 и 2 будет равна (пользуемся принципом суперпозиции):

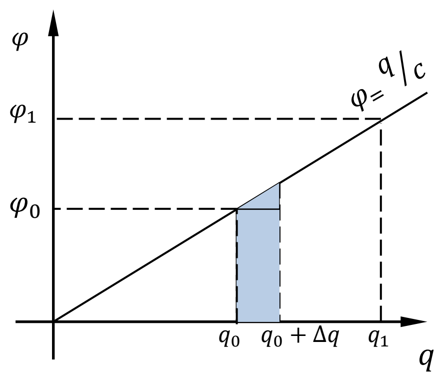
$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = E_1(d_1 + d_2) + E_2(-d_1 + d_2),$$

где $E_1 = \frac{q_0}{S\varepsilon_0}$, $E_2 = \frac{Q/2}{S\varepsilon_0}$. Поскольку $q_0 = \frac{s\varepsilon_0}{d_0}\phi_0$, а $d_1 + d_2 = d_0 - d$, то окончательно имеем:

$$\Delta\phi = \frac{d_0 - d}{d_0}\phi_0 + \frac{Q}{2S\varepsilon_0}(d_2 - d_1).$$

Энергия заряженного конденсатора. Плотность энергии электростатического поля

Чтобы зарядить конденсатор, необходимо перенести свободные заряды с одной пластины на другую. Электростатическое поле, возникающее при этом между пластинами, будет действовать на переносимые заряды, препятствуя процессу переноса, т.е. совершая отрицательную работу и увеличивая потенциальную энергию взаимодействия разделенных зарядов, то есть потенциальную энергию конденсатора. Пусть обкладки конденсатора уже заряжены зарядами q_0 и $-q_0$ ($q_0 > 0$). Пусть емкость конденсатора C, тогда разность потенциалов между его обкладками $\phi_0 = \phi_+ - \phi_- = q_0/C$. Следовательно, при переносе очень малого положительного заряда Δq с отрицательно заряженной обкладки на положительно заряженную обкладку, электрическое поле совершит работу $\Delta A = -\Delta q\phi_0$, а потенциальная энергия конденсатора увеличится на $\Delta W = \Delta q\phi_0$. Если построить график зависимости разности потенциалов между обкладками конденсатора от величины его заряда q, то ΔW будет равно площади заштрихованной области под графиком (см. рисунок), умноженной на соответствующий масштабный множитель. Отсюда ясно, что при перемещении с одной первоначально не заряженной пластины конденсатора емкости С на другую пластину некоторого заряда q_1, электрическое поле совершит работу



$$A = -\frac{1}{2}\phi_1 q_1 = -\frac{q_1^2}{2C} = -\frac{C\phi_1^2}{2},$$

а энергия конденсатора W изменится на величину

$$\Delta W = \frac{1}{2}q_1\phi_1 = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{C\phi_1^2}{2}.$$

Полагая энергию незаряженного конденсатора равной нулю, получим, что энергия конденсатора емкости С, заряженного зарядом q до разности потенциалов ф равна

$$W = \frac{1}{2}q\phi = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\phi^2}{2}.$$

С другой стороны, *энергию заряженного конденсатора можно рассматривать как энергию электростатического поля, заключенного между его обкладками*.

Рассмотрим плоский конденсатор с пластинами площади S, расположенными на расстоянии d. Пусть пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, и пластины заряжены зарядом q. Тогда между пластинами существует электростатическое почти однородное поле напряженностью

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon}.$$

А разность потенциалов между пластинами

$$\text{ф} = Ed.$$

Выражая из предпоследней формулы q через E и подставляя выражения для q и ϕ в формулу для энергии заряженного конденсатора (и, следовательно, для энергии электростатического поля), получим:

$$W = \frac{1}{2}(S\varepsilon_0\varepsilon E)(Ed) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 V$$

где $V \equiv Sd$ – объем области между обкладками конденсатора. Отсюда очевидно, что плотность энергии электрического поля, то есть его энергия в единице объема, определяется формулой:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2.$$

Оказывается, что полученная формула имеет общий характер и справедлива для плотности энергии любого (не только однородного) электрического поля.