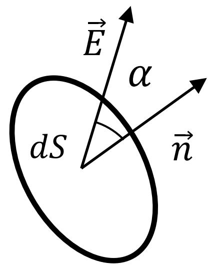
Лекция 2

Теорема Гаусса. Линии напряженности электрического поля (повторение). Потенциал

Теорема Гаусса для электрического поля

Введем скалярную величину $d\Phi$ — ее называют **элементарным потоком вектора напряженности электрического поля** через некоторую элементарную (маленькую, плоскую) ориентированную (т.е. с выбранным единичным вектором нормали $\vec{n}$) площадку:

$$d\Phi = EdS\cos\alpha = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right), \qquad (1)$$



где $\vec{E}$ — напряженность электрического поля в месте нахождения выбранной площадки, α — угол между вектором $\vec{E}$ и вектором $\vec{n}$ нормали к площадке (т.к. площадка маленькая и плоская, то поле $\vec{E}$ и угол α можно считать одинаковыми в разных ее точках), dS — площадь площадки, $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Потоком *Φ* вектора напряженности электрического поля через произвольную ориентируемую поверхность называется алгебраическая сумма потоков через элементарные площадки, образующие эту поверхность. При этом важно, чтобы направления нормалей к разным элементарным площадкам данной поверхности были согласованы между собой: если представить данную поверхность как двухсторонний лист бумаги, то все нормали должны начинаться на одной и той же стороне этой бумаги и не пересекать её. Такое согласование нормалей может быть осуществлено не для любой поверхности. Наиболее простой и известный пример не ориентируемой поверхности, для которой это сделать нельзя – так называемый лист Мёбиуса. В дальнейшем мы будем рассматривать только ориентируемые поверхности (по умолчанию). Заметим также, что в *случае замкнутой поверхности в качестве нормалей всегда выбираются **внешние нормали***.

Рассмотрим простое, но важное свойство величины $d\Phi$. Запишем формулу (1) в виде

$$d\Phi = (E\cos\alpha)dS = E_n dS,$$

где E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$. Если поле создается k зарядами, то по принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \cdots + \overrightarrow{E_k}.$$

Но проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов:

$$E_n = E_{1n} + E_{2n} + \cdots + E_{kn}.$$

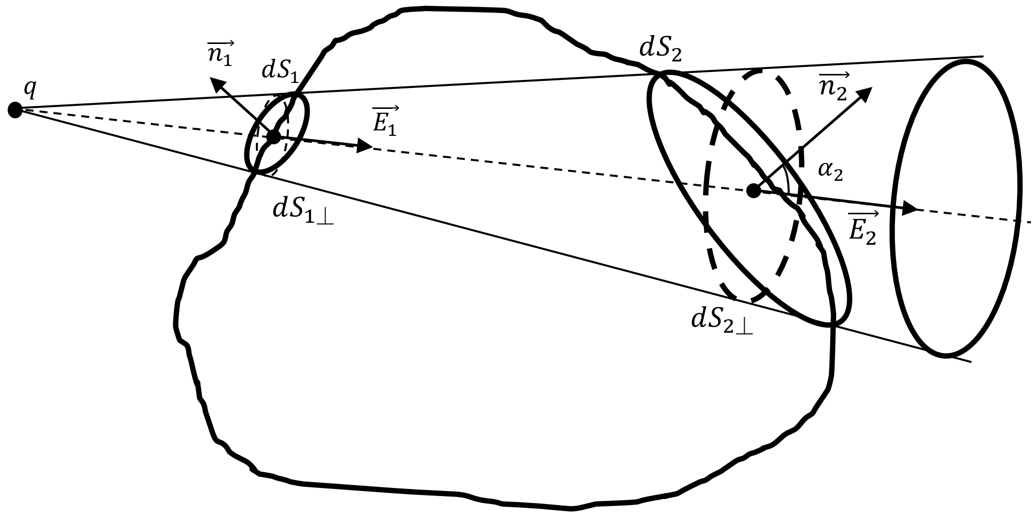
Умножая последнее равенство на dS, получим, что элементарный поток вектора напряженности равен сумме элементарных потоков, создаваемых отдельными зарядами:

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + \cdots + d\Phi_n.$$

Поскольку это справедливо для любой элементарной площадки, то, следовательно, выполняется и для любой поверхности:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n. \qquad (2)$$

Покажем теперь, что *поток напряженности электрического поля точечного заряда* q, *находящегося вне произвольной замкнутой поверхности S, через эту поверхность равен нулю*.



Построим очень узкий конус с вершиной в месте нахождения заряда q, пересекающий поверхность S, и найдем элементарные потоки через два очень маленьких (и поэтому практически плоских) участка поверхности, отсекаемых этим конусом на поверхности S:

$$d\Phi^{(1)} = E_1 dS_1 \cos\alpha_1 = -E_1 dS_{1\perp},$$

$$d\Phi^{(2)} = E_2 dS_2 \cos\alpha_2 = E_2 dS_{2\perp},$$

где $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2}$, $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2}$ и учтено, что в нашем случае угол α_1 тупой. В общем случае из двух углов α_1 и α_2 один всегда будет острым, а другой тупым, т.к в силу замкнутости поверхности S ось конуса должна войти и выйти из области, ограниченной поверхностью S одинаковое число раз. Из подобия следует, что площади сечений конуса, перпендикулярных его оси и расположенных на расстояниях r_1 и r_2 от его вершины, связаны соотношением:

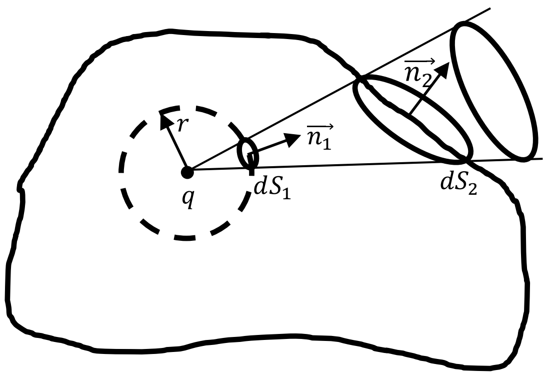
$$\frac{dS_{1\perp}}{dS_{2\perp}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Следовательно

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Phi^{(2)}} = -\frac{r_2^2}{r_1^2}\frac{r_1^2}{r_2^2} = -1 \quad \text{или} \quad d\Phi^{(1)} + d\Phi^{(2)} = 0.$$

Аналогичное взаимное уничтожение потоков происходит и для любой другой пары соответствующих участков поверхности S. Таким образом, доказано, что поток напряженности электрического поля точечного заряда q, находящегося вне произвольной замкнутой поверхности S, через эту поверхность равен нулю.

Вычислим теперь поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q, находящимся внутри произвольной замкнутой поверхности S_2, через эту поверхность. Окружим заряд q сферической поверхностью S_1 радиуса r, находящейся полностью внутри поверхности S_2. Рассуждая аналогично предыдущему, получим (см. рисунок), что в этом случае $d\Phi^{(1)} = d\Phi^{(2)}$, и, поэтому, поток через произвольную поверхность S_2 равен потоку через сферу S_1. А поток напряженности электрического поля через сферу S_1, очевидно, равен:



$$\Phi^{(1)} = \sum_{\text{по } S} EdS = E \sum_{\text{по } S} dS = ES_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Учитывая, что в силу (2) потоки векторов напряженности электрических полей, создаваемых различными зарядами алгебраически складываются, приходим к окончательной формулировке **теоремы Гаусса**: *поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен полному заряду, заключённому внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную*, т.е.

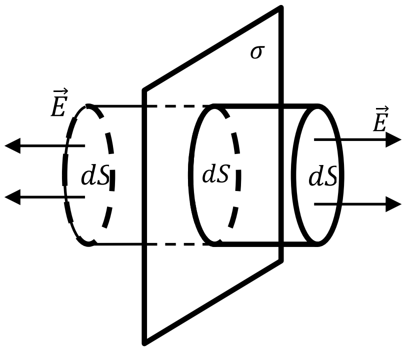
$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{внутр}}.$$

Напряженности электрических полей равномерно заряженной плоскости, сферы и шара

Используя теорему Гаусса, можно вычислять напряженность электрического поля, создаваемого заряженным телом при наличии существенной симметрии в распределении заряда.

Применим, например, теорему Гаусса для расчета напряженности электрического поля *равномерно заряженной плоскости*, т.е. плоскости, любые участки dS которой имеют одинаковый заряд dQ. Иными словами, **поверхностная плотность заряда** $\sigma \overset{\text{def}}{=} \frac{dQ}{dS}$ на такой плоскости одинакова в любом месте плоскости.

Из симметрии распределения заряда относительно плоскостей перпендикулярных заряженной плоскости следует, что вектор $\vec{E}$ всюду перпендикулярен заряженной плоскости. Выберем замкнутую поверхность в виде узкого цилиндра, расположенного симметрично относительно плоскости. Поток вектора напряженности электрического поля через боковую поверхность цилиндра очевидно равен нулю. Кроме того, из симметрии распределения заряда отно-



сительно заряженной плоскости следует, что потоки вектора напряженности через оба основания цилиндра площадью dS равны между собой и составляют $E_n dS$, т.е. полный поток равен

$$\Phi = 2E_n dS,$$

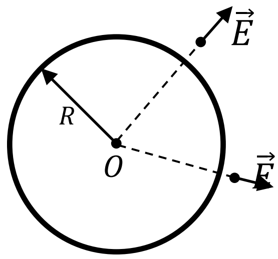
где $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный заряженной плоскости и направленный от неё. Но по теореме Гаусса поток Φ через поверхность цилиндра связан с зарядом $dQ = \sigma dS$ внутри цилиндра

$$\Phi = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}.$$

Из двух выражений для потока вектора напряженности электрического поля получим:

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Таким образом, *вектор напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью, направлен перпендикулярно плоскости от неё, если заряд плоскости положителен, и к ней, если заряд плоскости отрицателен. При этом величина напряженности электрического поля во всех точках пространства одинакова, кроме точек самой плоскости, где она не определена*. На самом деле бесконечных равномерно заряженных плоскостей не существует. Однако можно показать, что *напряженность электрического поля равномерно заряженной пластины конечных размеров мало отличается от (3) в точках, расположенных вблизи пластины далеко от её краёв*, т.е. если $h \ll r$, где h – расстояние от данной точки до пластины, а r – минимальное расстояние от данной точки до края пластины.



Найдем теперь напряженность электрического поля, создаваемого сферой радиуса R, равномерно заряженной зарядом Q. Из симметрии распределения заряда относительно плоскостей проходящих через центр сферы следует, что вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ всюду направлен вдоль радиуса. Кроме того, из симметрии поворота относительно точки O следует, что E_n зависит только от расстояния до центра сферы. Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор, сонаправленый в каждой точке её радиус – вектору, взятому относительно точки O. Построим сферу радиуса r с центром в точке O. Поток вектора напряженности через эту сферу будет равен:

$$\Phi = E_n S = 4\pi r^2 E_n(r).$$

С другой стороны, по теореме Гаусса:

$$\Phi = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0}, & r > R. \end{cases}$$

Отсюда

$$E_n(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Таким образом, *напряженность электрического поля сферы, равномерно заряженной зарядом* Q*, внутри сферы равна нулю, а вне сферы совпадает с напряженностью электрического поля точечного заряда* Q*, помещенного в её центр*.

Найдём теперь напряженность электрического поля шара радиуса R с центром в точке O, равномерно заряженного зарядом Q. В этом случае (как и для равномерно заряженной сферы) распределение зарядов, создающих поле, обладает сферической симметрией. Поэтому такой же симметрией обладает и поле: вектор напряженности электрического поля в каждой точке направлен коллинеарно радиус – вектору этой точки, взятому относительно точки O, а модуль напряженности одинаков во всех точках, равноудаленных от центра шара. Поэтому поток Φ вектора напряженности через сферическую поверхность радиуса r с центром в точке O будет по-прежнему равен произведению $E_n(r)$ на площадь поверхности сферы:

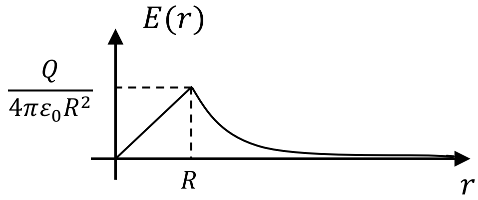
$$\Phi = E_n(r) 4\pi r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi = \begin{cases} \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0}, & r \leq R; \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0}, & r \geq R. \end{cases}$$

где $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ – объемная плотность заряда в шаре. Сравнивая два последних соотношения, имеем:

$$E_n(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r \equiv \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & r \leq R; \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

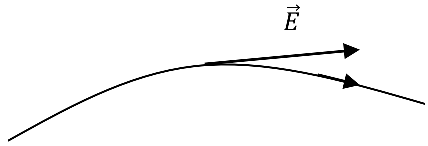


Итак, *электрическое поле шара, равномерно заряженного зарядом* Q*, вне шара совпадает с полем точечного заряда* Q*, помещенного в центр шара*. Нетрудно понять, что это же утверждение справедливо для шара с любым сферически симметричным распределением заряда.

Силовые линии электрического поля

Чтобы описать электрическое поле, надо задать вектор напряженности этого поля в каждой точке пространства. До сих пор мы делали это аналитически. Однако представить электрическое поле можно и графически. Для этого пользуются **силовыми линиями.**

Определение. Силовой линией или линией напряженности электрического поля, называется *направленная* линия, касательная к которой в каждой точке направлена вдоль вектора напряженности $\vec{E}$.



Замечание. Касательная, как и всякая прямая, определяет два взаимно противоположных направления. Поэтому силовой линии приписывают определенное направление (связанное с направлением вектора $\vec{E}$) и отмечают его на чертеже стрелкой.

Чтобы при помощи силовых линий изображать не только направление, но и **величину** напряженности поля, условились на графиках проводить силовые линии, соблюдая **«правило густоты»**. Т.е. так, чтобы *число силовых линий, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярной к силовым линиям, было пропорционально величине напряженности поля в данном месте*. Но тогда число силовых линий, проходящих через любую замкнутую поверхность, будет пропорционально потоку Φ вектора $\vec{E}$ через эту поверхность, и, следовательно (по теореме Гаусса) полному заряду, заключенному внутри этой поверхности. Отсюда следуют следующие важные свойства силовых линий электростатического поля:

1) силовые линии электростатического поля можно проводить, соблюдая «правило густоты» и не обрывая их при этом в пространстве между зарядами;

2) линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных; на каждом заряде начинается (или заканчивается) число линий, пропорциональное его величине.

Подчеркнем, что будь в законе Кулона хотя бы немного иная зависимость силы взаимодействия точечных зарядов от расстояния между ними, то теорема Гаусса была бы несправедлива, и провести силовые линии непрерывно, соблюдая при этом «правило густоты», было бы невозможно.

Работа сил электростатического поля. Потенциал

Поле *неподвижного* точечного заряда является центральным и, следовательно, потенциальным (см. лекции по механике). Т.е. при перемещении точечного заряда q_0 в поле другого неподвижного точечного заряда из одной точки в другую, работа сил электростатического поля не зависит от формы траектории. Если точечный заряд q_0 перемещается в поле нескольких неподвижных точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_N$, то по принципу суперпозиции на него действует сила:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$$

где $\vec{F}_i$ – сила, действующая на заряд q_0 со стороны заряда q_i (i = 1, 2, …, N) в отсутствии других зарядов. Но работа результирующей силы равна сумме работ составляющих её сил:

$$A_{1\to2} = \sum_{i=1}^{N} A_{i,1\to2}, \qquad (4)$$

где $A_{i,1\to2}$ – работа силы $\vec{F}_i$ при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2. В силу потенциальности поля точечного заряда, она не зависит от формы траектории, и, значит, работа $A_{1\to2}$ также не зависит от формы траектории. Поскольку любое фиксированное распределение заряда можно рассматривать как систему неподвижных точечных зарядов, то из равенства (4) следует, что электрическое поле, создаваемое любым фиксированным распределением заряда, является потенциальным. Этот факт позволяет ввести понятие разности потенциалов электростатического поля.

Определение. *Разностью потенциалов электростатического поля* $\phi_1 - \phi_2$ между точками 1 и 2 называется отношение работы, совершаемой *силами электростатического поля* при перемещении пробного точечного заряда q_0 из точки 1 в точку 2, к величине этого заряда:

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{A_{1\to2}^{(q_0)}}{q_0}.$$

При этом существенно, что правая часть последнего неравенства не зависит от величины заряда q_0. Действительно, если из точки 1 в точку 2 по одинаковой траектории перемещаются пробные заряды q_1 и q_2, то в каждой точке действующие на них электростатические силы будут отличаться в q_1/q_2 раз. Поэтому и работы сил поля будут отличаться в это же число раз:

$$\frac{A_{1\to2}^{(q_1)}}{A_{1\to2}^{(q_2)}} = \frac{q_1}{q_2} \Leftrightarrow \frac{A_{1\to2}^{(q_1)}}{q_1} = \frac{A_{1\to2}^{(q_2)}}{q_2}.$$

Итак, разность потенциалов является характеристикой самого электростатического поля и не зависит от величины пробного заряда, который в этом поле перемещается.

Из уравнения (4) следует, что если электростатическое поле создается системой N неподвижных зарядов, то его *разность потенциалов удовлетворяет принципу суперпозиции*:

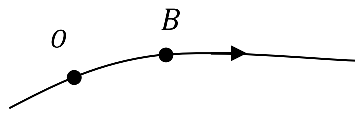
$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{q_0} A_{1\to2}^{(q_0)} = \frac{1}{q_0}\sum_{i=1}^{N} A_{i,1\to2}^{(q_0)} = \sum_{i=1}^{N}\left(\phi_1^{(i)} - \phi_2^{(i)}\right),$$

где $\phi_1^{(i)} - \phi_2^{(i)}$ – разность потенциалов между точками 1 и 2 поля, создаваемого зарядом q_i.

Однозначно определена только разность потенциалов между двумя точками. Поэтому потенциалу в какой-либо одной точке O можно приписать любое значение ϕ_0 (например, $\phi_0 = 0$). Тогда значения потенциалов во всех остальных точках определяются однозначно:

$$\phi_{\text{в}} = \phi_0 + \frac{1}{q} A_{\text{в}\to0}^{(q)} = \phi_0 - \frac{1}{q} A_{0\to\text{в}}^{(q)}$$

Заметим, что как видно из последней формулы, при перемещении в направлении силовой линии потенциал уменьшается.



За нулевой потенциал часто удобно принимать потенциал бесконечно удаленной точки пространства. На практике обычно принимают потенциал Земли равным нулю.

Из определения разности потенциалов следует, что

$$A_{1\to2}^{(q)} = q(\phi_1 - \phi_2). \qquad (5)$$

С другой стороны, если поле сил консервативное, то его работу при перемещении некоторой частицы можно представить как разность потенциальных энергий в начале и конце траектории:

$$A_{1\to2}^{(q)} = W_1 - W_2$$

Сравнивая последние два соотношения, получаем, что, если положить потенциальную энергию частицы в электростатическом поле в точке с нулевым потенциалом равной нулю, то потенциальная энергия W точечного заряда q в любой точке будет равна произведению величины заряда на потенциал электростатического поля ф в этой точке:

$$W = q\,\phi. \qquad (6)$$

В международной системе единиц СИ единицей потенциала служит **вольт** (В). 1 Вольт это разность потенциалов между двумя точками электростатического поля, при перемещении между которыми заряда в 1 Кл поле совершает работу, равную 1 Дж:

1 В =1 Дж/(1 Кл)

Заметим, что единицей измерения напряженности электрического поля в СИ является 1 В/м. Действительно, по определению

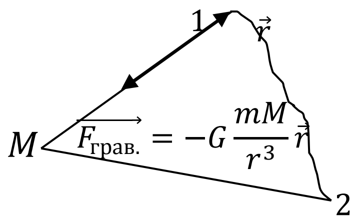
$$[\vec{E}] = \left[\frac{\vec{F}}{q}\right] = \frac{1\text{ Н}}{1\text{ Кл}} = \frac{1\text{ Н }1\text{м}}{1\text{ Кл }1\text{ м}} = \frac{1\text{ Дж}}{1\text{ Кл }1\text{ м}} = \frac{1\text{ Дж}}{1\text{ Кл }1\text{ м}} = \frac{1\text{ В}}{1\text{ м}} = 1\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

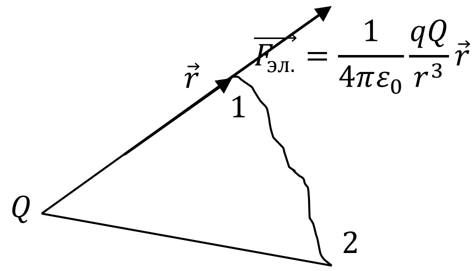
Определение. Поверхность, во всех точках которой потенциал электростатического поля имеет одинаковые значения, называется *эквипотенциальной поверхностью*.

Между любыми двумя точками эквипотенциальной поверхности разность потенциалов равна нулю, поэтому работа сил электрического поля при любом перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю. Это означает, что вектор силы $\vec{F}$ (и, следовательно, вектор напряженности $\vec{E}$) в любой точке любой траектории, лежащей на эквипотенциальной поверхности, перпендикулярен вектору перемещения. Но это возможно только, если линии напряженности электростатического поля перпендикулярны эквипотенциальной поверхности.

Очевидно, что эквипотенциальными поверхностями поля точечного заряда являются сферы, в центре которых расположен заряд.

Найдем потенциал точечного заряда. С этой целью воспользуемся тем, что силы гравитационного взаимодействия между двумя точечными массами и электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами одинаково зависят от расстояния между частицами.





Как известно из курса механики, работа гравитационных сил при перемещении точечной массы m в поле неподвижной массы M с расстояния r_1 на расстояние r_2 равно:

$$A_{1\to2}^{(\text{грав})} = -GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Поэтому очевидно, что работу электростатических сил при перемещении точечного заряда q в поле неподвижного заряда Q с расстояния r_1 на расстояние r_2 можно найти по формуле:

$$A_{1\to2}^{(\text{эл})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (7)$$

Сопоставляя (5) – (7), сразу получаем, что

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1, \qquad W^{(\text{эл})}(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2,$$

где значение констант C_1 и $C_2 = qC_1$ зависит от выбора положения нулевой точки (точки с нулевым потенциалом и нулевой потенциальной энергией). Напомним, что в случае гравитационного взаимодействия $W^{(\text{грав})} = -\frac{GmM}{r} + C$. Единственное принципиальное отличие в формулах для $W^{(\text{эл})}$ и $W^{(\text{грав})}$ заключается в знаках. Оно объясняется тем, что две точечные массы (два «одноименных гравитационных заряда») притягиваются, в то время как два одноименных электрических заряда отталкиваются.

Заметим, что, как и в случае гравитационного поля, если перемещаются оба заряда q и Q, то величину $W^{(\text{эл})}$ следует рассматривать как энергию их взаимодействия.