

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

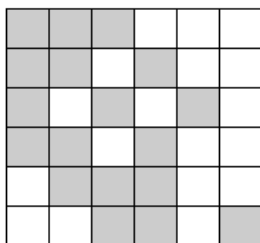
Математика

7 класс

1. Можно ли расставить несколько фишек в клетки таблицы 6×6 так, чтобы в каждой строке было ровно три фишки, а в каждом столбце — либо одна, либо четыре? (В каждую клетку можно поставить не более одной фишки.)

Ответ. Можно.

Решение. Подойдет, например, такая расстановка (на каждую серую клетку надо поставить фишку).



2. Вася выбрал шестизначное число \overline{ABCDEF} (разными буквами обозначены разные цифры). Оказалось, что

$$3 \cdot \overline{ABCDEF} = 4 \cdot \overline{DEFABC}.$$

Какое число изначально мог задумать Вася? Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ. Вася задумал число 571428.

Решение. Заметим, что

$$\overline{ABCDEF} = 1000 \cdot \overline{ABC} + \overline{DEF}, \quad \overline{DEFABC} = 1000 \cdot \overline{DEF} + \overline{ABC}.$$

Тогда равенство из условия можно переписать следующим образом:

$$3 \cdot (1000 \cdot \overline{ABC} + \overline{DEF}) = 4 \cdot (1000 \cdot \overline{DEF} + \overline{ABC}).$$

Приведа подобные слагаемые, получим

$$2996 \cdot \overline{ABC} = 3997 \cdot \overline{DEF} \iff \frac{\overline{ABC}}{\overline{DEF}} = \frac{571}{428}.$$

Дробь $\frac{571}{428}$ несократима, поэтому если дробь $\frac{\overline{ABC}}{\overline{DEF}}$ несократима, то $\overline{ABC} = 571$, $\overline{DEF} = 428$. Но сократимой она быть не может, потому что иначе

$$\overline{ABC} \geq 2 \cdot 571 > 1000.$$

Следовательно, $\overline{ABCDEF} = 571428$.

3. Доска 1000×1000 раскрашена в шахматном порядке в белый и черный цвет. Эту доску разрезали на квадраты с нечетными длинами сторон, в каждом квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток отмечено поровну.

Решение. Рассмотрим какой-нибудь квадрат с нечетной длиной стороны, раскрашенный в шахматном порядке. Несложно видеть, что если отбросить нижнюю строку этого квадрата, то в оставшейся части количество белых и черных клеток одинаково (например, потому что строки бьются на пары рядом стоящих, в каждой такой паре количество клеток каждого цвета одинаково). Но в нижней строке количество клеток одного цвета ровно на 1 больше количества клеток другого цвета, а именно больше клеток того цвета, в который окрашены угловые клетки квадрата. Также несложно видеть, что центральная клетка покрашена в тот же цвет, что и угловые.

В каждом квадрате разбиения отбросим центральную клетку. В каждом из получившихся квадратов без центральной клетки количество клеток черного и белого цветов совпадает. Также в исходном квадрате черных и белых клеток было поровну. Но тогда среди выброшенных клеток было поровну белых и черных клеток, что и требовалось доказать.

4. Десятичная запись числа $5 \cdot N$, где N — натуральное число, состоит из двухсот пятерок и двухсот шестерок (порядок цифр может быть любым). Чему может быть равна сумма цифр числа N ? Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ. 800.

Решение. Заметим, что сумма цифр числа N равна сумме цифр числа

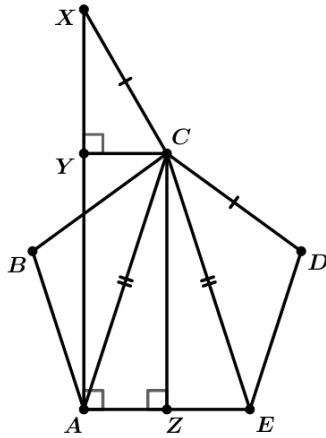
$$10 \cdot N = 2 \cdot 5 \cdot N,$$

поэтому достаточно найти сумму цифр числа $2 \cdot 5 \cdot N$. Поскольку десятичная запись числа $5 \cdot N$ состоит из пятерок и шестерок, то при домножении на 2 из каждого разряда будет перенос в следующий разряд. Во всех разрядах, в которых стояла пятерка, после умножения на 2 будет стоять единица (кроме разряда единиц, в котором будет стоять 0), а во всех разрядах, в которых стояла шестерка, будет стоять тройка. Кроме того, в числе появится еще один разряд (за счет переноса единицы из старшего разряда). Таким образом, десятичная запись числа $10 \cdot N$ будет состоять из двухсот единиц, двухсот троек и нуля на конце. Сумма цифр такого числа равна 800.

5. Вне правильного пятиугольника $ABCDE$ выбрана точка X такая, что $\angle XAE = 90^\circ$ и длина отрезка CX равна длине стороны пятиугольника. Найдите величину угла CXA .

Ответ. 30° .

Решение. Опустим перпендикуляры CY и CZ из точки C на отрезки AH и AE соответственно.



Поскольку треугольники ABC и CDE равны, то $AC = CE$. Тогда CZ — высота и медиана равнобедренного треугольника ACE , то есть Z — середина отрезка AE . Поскольку прямые CZ и AX перпендикулярны отрезку AE , то они параллельны, откуда $AZ = CY$. Тогда в прямоугольном треугольнике CXY катет CY в два раза короче гипотенузы CX , а в таком треугольнике, как известно, $\angle CXY = 30^\circ$.