3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

9 класс

1. На доске написан квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Каждую минуту трёхчлен $f(x)$, записанный к этому моменту на доске, стирают, а вместо него записывают трёхчлен

$$\frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}.$$

Докажите, что через некоторое время на доске появится квадратный трёхчлен, не имеющий корней.

Решение. Заметим, что

$$\frac{f(x+1) + f(x-1)}{2} = ax^2 + bx + c + a,$$

поэтому спустя n минут на доске будет записан трёхчлен $ax^2 + bx + (c + an)$. Его дискриминант равен

$$D = b^2 - 4a(c + an) = b^2 - 4ac - 4an^2.$$

Поскольку число $4an^2$ положительно, то при достаточно больших n дискриминант будет отрицателен, то есть квадратный трёхчлен не будет иметь корней.

Замечание. Можно непосредственно указать n, удовлетворяющее условию задачи:

$$b^2 - 4ac - 4an^2 < 0 \implies n > \sqrt{\left|\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right|}.$$

2. Существует ли число, квадрат которого начинается ровно с 2019 девяток?

Ответ. Существует.

Решение. Докажем, что число $10^{2020} - 5$ подходит. Действительно,

$$\left(10^{2020} - 5\right)^2 = 10^{4040} - 2 \cdot 5 \cdot 10^{2020} + 25 = 10^{4040} - 10^{2021} + 25 =$$

$$= 10^{2021} \cdot \left(10^{2019} - 1\right) + 25 = 10^{2021} \cdot \underbrace{9\ldots9}_{2019} + 25 = \underbrace{9\ldots9}_{2019}\underbrace{0\ldots0}_{2019}25.$$

Замечание. Можно показать, что подходит любое число, у которого первые 2019 цифр — девятки, а 2020-я цифра не меньше 5.

3. На столе лежит 100 куч камней. Два игрока делают ходы по очереди. За один ход разрешается взять со стола произвольное ненулевое число камней так, чтобы ход затрагивал не более чем 99 куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для любого начального положения камней укажите, кто выигрывает — начинающий или его противник.

Ответ. Если во всех кучах поровну камней, выигрывает второй игрок, во всех остальных случаях выигрывает первый игрок.

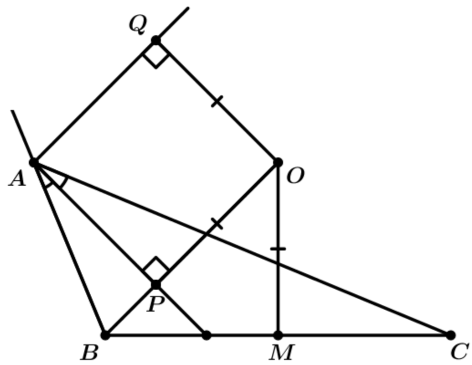
Решение. Выигрышная стратегия состоит в том, чтобы оставлять противнику 100 куч с одинаковым количеством камней. Поскольку противник в ответ возьмёт камни не из всех куч, после его хода получится набор куч, в котором не во всех кучах одинаковое количество камней. Тогда игрок, пользующийся выигрышной стратегией, отложит в сторону кучу (или несколько куч), количество камней в которых минимально, и возьмёт из остальных куч столько камней, чтобы опять количество камней во всех ста кучах уравнялось. Таким образом, он опять оставит противнику сто куч с одинаковым количеством камней.

Поскольку в конечной позиции во всех кучах 0 камней (т.е. поровну) и число камней убывает, то игрок, пользующийся предложенной стратегией, действительно выиграет. Очевидно, что если изначально не во всех кучах камней поровну, этой стратегией сможет воспользоваться первый игрок, а в остальных случаях её сможет применить второй игрок.

4. В треугольнике ABC с тупым углом B проведены биссектрисы угла BAC и биссектриса внешнего угла при вершине A. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Расстояния от точки O до обеих биссектрис, а также до прямой BC, равны. Найдите $\angle ABC$.

Ответ. $\angle ABC = 112{,}5^\circ$.

Решение. Пусть P и Q — основания перпендикуляров из точки O на биссектрисы угла BAC и угла, смежного с ним, M — середина стороны BC. Заметим, что угол PAQ прямой, поскольку биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны. Таким образом, в четырёхугольнике $AQOP$ три угла прямые, а также равны стороны OP и OQ, то есть он является квадратом.



Пусть $OP = OQ = OM = a$, тогда $OA = \sqrt{2}a$. Но $OA = OB$ как радиусы описанной окружности. Тогда в прямоугольном треугольнике OBM гипотенуза OB в $\sqrt{2}$ раз больше катета OM, поэтому $\angle OBM = 45^\circ$.

Поскольку треугольник OBC равнобедренный, то угол BOC прямой, откуда $\angle BAC = 45^\circ$ как половина центрального угла. Тогда $\angle BAP = 45^\circ/2 = 22{,}5^\circ$.

Поскольку треугольник AOB равнобедренный, то

$$\angle ABO = \angle BAO = \angle BAP + \angle PAO = 22{,}5^\circ + 45^\circ = 67{,}5^\circ.$$

В итоге имеем

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 67{,}5^\circ + 45^\circ = 112{,}5^\circ.$$

Замечание. На рисунке точка P лежит на отрезке BO. Это на самом деле так, но в решении задачи это не было использовано.

5. В школе 80 первоклашек. Один из них — Петя — разбил окно, а другой — Вася — это видел. Директор знает, что кто-то из первоклашек разбил окно, а кто-то другой из первоклашек это видел, но не знает, кто именно. Директор может раз в день вызвать для беседы к себе в кабинет одного или нескольких первоклашек. Если в кабинете окажется Вася в тот момент, когда там нет Пети, то он расскажет, что окно разбил Петя. Если Вася окажется в кабинете вместе с Петей, то он будет молчать. Может ли директор понять, кто разбил окно, не более чем за 12 дней?

Ответ. Может.

Решение. Занумеруем первоклашек в троичной системе счисления числами $\overline{abcd}$ от 0001 до 2222 (таких чисел ровно $3^4 - 1 = 80$). Пусть в k-ый день директор приглашает к себе тех первоклашек, номера которых удовлетворяют k-му из следующих равенств:

$$a = 0,\ a = 1,\ a = 2,\ b = 0,\ b = 1,\ b = 2,\ c = 0,\ c = 1,\ c = 2,\ d = 0,\ d = 1,\ d = 2.$$

Тогда в один из дней директор пригласит к себе Васю, но не пригласит Петю, поскольку их номера отличаются хотя бы в одной цифре.

Другое решение. Покажем, что директор справится за 9 дней. Сопоставим каждому первоклашке последовательность из девяти цифр, каждая из которых является нулем или единицей, причём в последовательности ровно пять единиц. Поскольку количество таких последовательностей равно $C_9^5 = 126$, то это удастся сделать. Пусть в k-ый день директор приглашает всех, у кого k-ая цифра в последовательности равна единице. Поскольку все последовательности содержат по пять единиц, то найдётся такой номер n, что на n-ом месте у Васи стоит единица, а у Пети — ноль. Тогда в n-ый день директор узнает правду.

Замечание. Можно показать, что меньше, чем за 9 дней, директор не сможет гарантированно узнать, кто разбил окно.