

# 3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

## Математика

10 класс

1. Найдите все натуральные числа  $m$  такие, что число  $m^2 + 2$  записывается одними шестёрками.
2. Найдите наименьший положительный нецелый корень уравнения  $\sin x = \sin[x]$ . ( $[x]$  — это наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .)
3. В каждой клетке таблицы  $10 \times 10$  написано положительное число. На каких-то пяти клетках лежат камни, которые загораживают написанные числа. Петя посчитал сумму всех видимых чисел и получил 10. После этого он переложил каждый камень на соседнюю по стороне клетку, причём никакие два камня не оказались на одной клетке. Посчитав сумму видимых чисел заново, он получил  $10^2$ . И так далее, на каждом шаге он перекладывал каждый камень на соседнюю по стороне клетку, после чего сумма видимых чисел увеличивалась в 10 раз. Петя проделал  $k$  шагов и получил сумму всех видимых чисел, равную  $10^k$ . Найдите максимально возможное значение  $k$ .
4. Существует ли такое целое число  $a$ , что многочлен  $x^{15} + x + 90$  делится на многочлен  $x^2 - x + a$ ?
5. К непересекающимся окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$  проведена общая внешняя касательная  $l$ . Через точки касания  $l$  с окружностями проведена окружность, вторично пересекающая  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Через точки  $A$  и  $B$  проведены касательные к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, которые пересеклись в точке  $X$ , причём точки  $A, B, X$  лежат в одной полуплоскости относительно  $l$ . Докажите, что  $AX = BX$ .