3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

10 класс

1. Найдите все натуральные числа m такие, что число m^2+2 записывается одними шестёрками.

Ответ. $m = 2, 8$.

Решение. Заметим, что число m^2+2 может состоять из одной и двух шестёрок, в этих случаях $m = 2$ и $m = 8$ соответственно. Предположим, что m^2+2 состоит из более, чем двух шестёрок. Тогда $m^2 = \overline{\ldots 664}$. По признаку делимости на 8 правая часть делится на 8, поэтому и m^2 делится на 8, то есть делится на 16. Но числа 664 и $\overline{\ldots 6664}$ на 16 не делятся, противоречие.

2. Найдите наименьший положительный нецелый корень уравнения $\sin x = \sin[x]$. ($[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. $9\pi - 14$.

Решение. Уравнение $\sin x = \sin y$ имеет две серии решений: $y = x + 2\pi k$ и $y = \pi - x + 2\pi k$. Так как $0 < x - [x] < 1$, то x и $[x]$ принадлежат разным сериям решений, следовательно

$$x + [x] = \pi + 2\pi k = \pi(2k+1).$$

При этом $[x + [x]] = 2[x]$, то есть нас интересуют такие k, что $[\pi(2k+1)]$ чётно. Перебором убеждаемся, что первое такое k — это 4. Тогда $x + [x] = 9\pi$ и $x = 9\pi - 14$.

3. В каждой клетке таблицы 10×10 написано положительное число. На каких-то пяти клетках лежат камни, которые загораживают написанные числа. Петя посчитал сумму всех видимых чисел и получил 10. После этого он переложил каждый камень на соседнюю по стороне клетку, причём никакие два камня не оказались на одной клетке. Посчитав сумму видимых чисел заново, он получил 10^2. И так далее, на каждом шаге он перекладывал каждый камень на соседнюю по стороне клетку, после чего сумма видимых чисел увеличивалась в 10 раз. Петя проделал k шагов и получил сумму всех видимых чисел, равную 10^k. Найдите максимально возможное значение k.

Ответ. Максимальное значение k равно 6.

Решение. На всех клетках, которые были видны вначале, стоят числа, не превосходящие 10. Поскольку после первого перекладывания сумма чисел сильно увеличилась, стали видны какие-то клетки, которые ранее загораживали камни. Очевидно, числа, записанные в этих клетках, не превосходят 100. После второго перекладывания сумма чисел опять сильно увеличилась, и это могло произойти лишь за счёт того, что стали видны какие-то клетки, которых не было видно ни в первый, ни во второй раз. При этом числа, стоящие на вновь открывшихся клетках, заведомо не превосходят 1000.

Рассуждая таким образом, мы устанавливаем, что после очередного перекладывания должны открыться клетки, которых до этого ни разу не было видно. Поскольку вначале камни заслоняют всего 5 клеток, количество перекладываний, позволяющих сумме так сильно увеличиваться, не может быть больше 5.

Приведём пример, когда 5 перекладываний возможно. Пусть камни занимают самые левые 5 клеток верхней строки таблицы, и всякий раз каждый камень перемещается на соседнюю справа клетку. Пусть на клетках, где расположены камни, написаны числа a, b, c, d, e, а во всех остальных клетках написано число f. Полагая

$$f = 10/95, \quad a = 10^2 - f, \quad b = 10^3 - a - 2f, \quad c = 10^4 - a - b - 3f,$$

$$d = 10^5 - a - b - c - 4f, \quad e = 10^6 - a - b - c - d - 5f,$$

получаем требуемое.

4. Существует ли такое целое число a, что многочлен $x^{15} + x + 90$ делится на многочлен $x^2 - x + a$?

Ответ. Не существует.

Решение. Поделим один многочлен на другой:

$$x^{15} + x + 90 = P(x) \cdot (x^2 - x + a).$$

Тогда $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Подставим $x = 0$ и $x = 1$ в это равенство:

$$90 = P(0) \cdot a, \quad 92 = P(1) \cdot a.$$

Поскольку $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то $P(0)$ и $P(1)$ — целые числа, поэтому 90 и 92 делятся на a. У чисел 90 и 92 только четыре общих делителя: ± 1 и ± 2.

- Если $a = 1$, то подставим $x = 2$. Получим, что $2^{15} + 92 \,\vdots\, 3$. Но 2^{15} даёт остаток 2 при делении на 3, поэтому $2^{15} + 92$ не делится на 3, противоречие.

- Если $a = 2$, то подставим $x = 2$. Получим, что $2^{15} + 92 \,\vdots\, 4$. Но 92 не делится на 4, поэтому $2^{15} + 92$ не делится на 4, противоречие.

- Если $a = -2$, то подставим $x = 2$. Получим, что $2^{15} + 92 = 0$, противоречие.

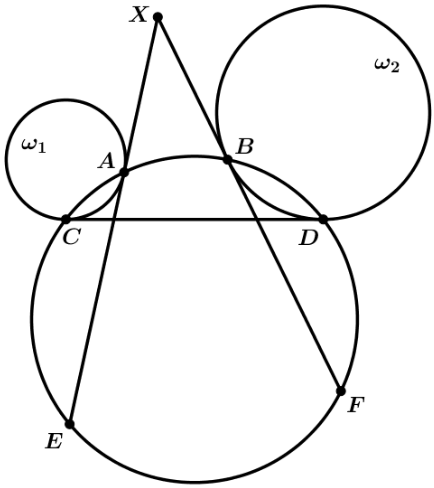
- Если $a = -1$, то подставим $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Значение многочлена $x^{15} + x + 90$ будет положительно, а значение многочлена $x^2 - x - 1$ равно 0. Таким образом, $x^{15} + x + 90$ не делится на $x^2 - x - 1$.

Получаем, что таких a не существует.

5. К непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведена общая внешняя касательная l. Через точки касания l с окружностями проведена окружность ω_3, вторично пересекающая ω_1 и ω_2 в точках A и B соответственно. Через точки

A и B проведены касательные к ω_1 и ω_2 соответственно, которые пересеклись в точке X, причём точки A, B, X лежат в одной полуплоскости относительно l, а точка X лежит вне ω_3. Докажите, что $AX = BX$.

Решение. Обозначим точки касания l с ω_1 и ω_2 через C и D соответственно. Пусть прямые XA и XB вторично пересекают ω_3 в точках E и F.



Заметим, что биссектриса одного из углов между прямыми AE и CD является серединным перпендикуляром к отрезку AC, то есть проходит через центры ω_1 и ω_3. Следовательно, при симметрии относительно этой биссектрисы ω_1 и ω_3 переходят в себя, а отрезок AE переходит в отрезок CD, откуда $AE = CD$. Аналогично $CD = BF$, поэтому $AE = BF$. По теореме о секущих

$$XA \cdot XE = XB \cdot XF \iff XA \cdot (XA + AE) = XB \cdot (XB + BF) \iff$$

$$\iff (XA^2 - XB^2) + AE \cdot (XA - XB) = 0 \iff (XA - XB) \cdot (XA + XB + AE) = 0,$$

откуда $XA = XB$.