Задача №1

В одной из моделей расширяющейся Вселенной радиус Вселенной имеет скорость изменения, которая зависит от времени t и текущего значения $r(t)$ по формуле $v(t) = v_0 \frac{R^2}{r^2(t)}(1 - \frac{t}{t_0})$, где t–время, отсчитываемое от настоящего момента времени, когда радиус Вселенной равен R. Найдите максимальный радиус Вселенной в такой модели, считая R, v_0 и t_0 известными.

Примечание: Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, площадь поверхности сферы $S = 4\pi r^2$.

Решение

Малое изменение объема шара

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r,$$

где Δr – малое изменение радиуса шара.

Скорость изменения радиуса Вселенной

$$v(t) = \frac{\Delta r}{\Delta t} = v_0 \frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

Выражая Δrиз второго уравнения, находим, что скорость изменения объема линейна по времени

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4\pi v_0 R^2 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

Таким образом, начальная величина скорости изменения объема Вселенной $u_0 = 4\pi v_0 R^2$, а ускорение, с которым меняется скорость, отрицательно и по модулю равно $w = \frac{4\pi v_0 R^2}{t_0}$. Тогда закон изменения объема Вселенной имеет вид

$$V(t) = V_0 + u_0 t - \frac{wt^2}{2},$$

где $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$.Максимальное значение радиуса будет в тот момент времени, когда максимален объем, т.е. при $t_м = \frac{u_0}{w}$. Тогда максимальный объем будет $V(t_м) = V_0 + \frac{u_0^2}{2w}$. Максимальный радиус будет равен

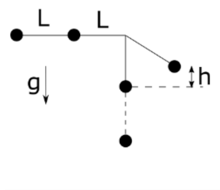
$$R_м = R\left(1 + \frac{3v_0 t_0}{2R}\right)^{1/3}$$

Ответ

$$R_м = R\left(1 + \frac{3v_0 t_0}{2R}\right)^{1/3}$$

Задача №2

Два одинаковых маленьких тяжелых шарика сцеплены легкой штангой длины L и присоединены к потолкудругой легкой штангой длины L за один из шариков. Шарики отводят горизонтально и отпускают. В тот момент, когда система проходит вертикальное положение, нижний шарик отрывается. Считая, что оба шарика и точка подвеса находились на одной прямой все время до момента отрыва, найдите максимальную высоту, на которую поднимется после этого оставшийся шарик. Ускорение свободного падения g.



Решение

Энергия двух шариков равна

$$E_1 = 2mg2L = 4mgL,$$

где потенциальная энергия отсчитывается от самого нижнего положения левого шарика.

Энергия системы при прохождении вертикального положения до момента отрыва

$$E_2 = mgL + \frac{mL^2\omega^2}{2} + \frac{m(2L)^2\omega^2}{2}.$$

Т.к. силы трения отсутствуют, а силы натяжений и упругости работу не совершают, то энергия системы сохраняется

$$E_1 = E_2$$

Или

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{5l}}.$$

Энергия оставшегося шарика сразу после отрыва второго

$$E_3 = \frac{mL^2\omega^2}{2},$$

энергия при подъеме на максимальную высоту

$$E_4 = mgh.$$

После отрыва второго шарика, энергия оставшегося сохраняется по тем же причинам, тогда

$$E_3 = E_4$$

или

$$h = \frac{3}{5}L.$$

Ответ

$$h = \frac{3}{5}L.$$

Задача №3

Лазер мощностью $P = 1000$ Вт направили на кусок льда массой $m = 1$ кг при температуре $t_0 = 0^{\circ}$С через стеклянную пластинку. Коэффициент отражения излучения при переходе через границу стекла равен $\alpha = 0{,}2$ (20% энергии отражается от границы пластинки при переходе через границу), коэффициент прохождения равен $\beta = 0{,}5$ (50% энергии проходит через границу), коэффициент поглощения равен $\gamma = 0{,}3$ (30% энергии поглощается на границе). Найдите, через какое время лед растает.

Решение

Мощность излучения, которая пройдет сквозь пластинку

$$P_0 = \beta^2 P + \alpha^2 \beta^2 P + \alpha^4 \beta^2 P + \cdots$$

Или, выполнив суммирование,

$$P_0 = \beta^2 P(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots) = \frac{\beta^2}{1 - \alpha^2} P.$$

Если лед растает за время τ, то

$$P_0 \tau = \lambda m,$$

тогда

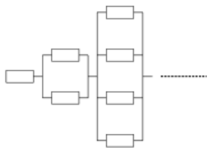
$$\tau = \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2} \frac{\lambda m}{P}$$

Ответ

$$\tau = \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2} \frac{\lambda m}{P}$$

Задача №4

Найдите общее сопротивление бесконечной цепи, если сопротивление каждого резистора равно R.



Решение

Сопротивление n-го звена, состоящего из 2^n параллельно соединенных резисторов равно

$$R_n = R/2^n.$$

Тогда полное сопротивление цепи равно бесконечной сумме сопротивлений всех звеньев

$$R_0 = \sum R_n = R \sum \frac{1}{2^n} = R \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2R.$$

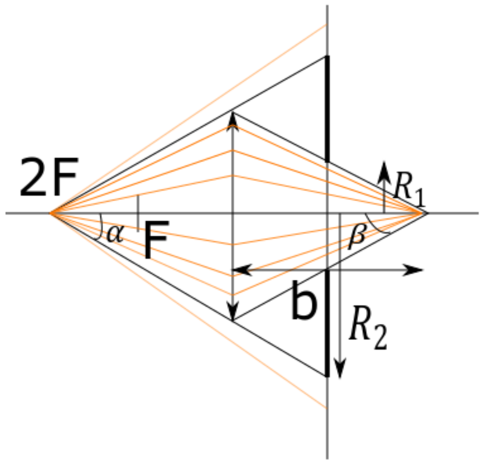
Ответ

$$R_0 = 2R.$$

Задача №5

На оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F на расстоянии $2F$ от её оптического центра расположен точечный источник света. За линзой на расстоянии F расположен экран. Найдите площадь тени на экране в такой системе, если диаметр линзы равен $2F$.

Решение



В отсутствии экрана изображение получается на расстоянии b:

$$\frac{1}{2F}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F},$$

или, $b=2F$. Вообще говоря, данная формула справедлива только в приближении параксиальной оптики (для малых углов отклонения лучей от главной оптической оси), однако, будем в пределах данной задачи считать, что приближения параксиальной оптики справедливы. Найдем $\tan\alpha$ и $\tan\beta$ углов, указанных на рисунке

$$\tan\alpha=\frac{F}{2F}=\frac{1}{2},$$

$$\tan\beta=\frac{F}{2F}=\frac{1}{2}.$$

Тогда,

$$\tan\alpha=\frac{R_2}{3F}\to R_2=3F\tan\alpha=\frac{3}{2}F,$$

$$\tan\beta=\frac{R_1}{F}\to R_1=F\tan\beta=\frac{1}{2}F.$$

Тень представляет собой круг радиуса R_2 с вырезанным по центру кругом радиуса R_1, тогда площадь тени равна $S=\pi R_2^2-\pi R_1^2=2\pi F^2$.

Ответ

$$S=2\pi F^2$$