

Что такое математическое моделирование

Константин Авилов

научный сотрудник ИВМ РАН

член Expert Panel IMMS

Математическое моделирование и школа

- В российской школе, как считается, не изучают математическое моделирование. Но изучают математику, физику, химию, программирование и т.д.
- На самом деле все естественные науки едины, а математика и информатика – это инструменты, созданные по запросам физики и других «практических» наук.
- Математическое моделирование – это, по сути, метод всех количественных исследований в любых науках.
- С точки зрения школы, математическое моделирование – это обратное соединение всех естественных наук в единую «science».

Математическое моделирование и естественные науки

- Любое исследование, ищущее связь между измеримыми (количественными) параметрами чего-либо, порождает математическую модель.
- Математическая модель – это всегда некоторое упрощение, некоторая концептуализация, отсекающая какие-то свойства реальности.
- Изучение *адекватной* математической модели позволяет узнать некоторые свойства объекта моделирования.
- Адекватность мат.моделей – вопрос крайне сложный.

Построение математических моделей

Стратегии построения математических моделей:

- **«От теории»:** в областях, где уже почти всё известно и имеются хорошо подтвержденные теории, мат.модели строятся как частный случай теории. Обычно есть «конструктор» из примитивов, позволяющий «собирать» мат.модель.

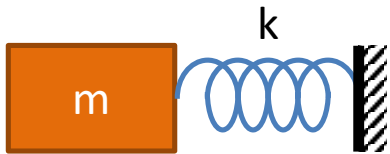
Примеры: классическая механика и пр. классическая физика

- **«От данных»:** в областях, где общих теорий нет, или непонятно, что происходит в эксперименте, мат.модели строятся как инструмент поиска зависимостей в данных.

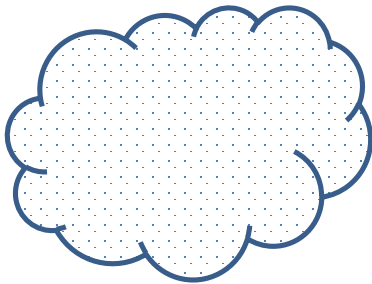
Примеры: биология/медицина, «передний край» любых естественных наук

Типы «простых» математических моделей

1) Алгебраические модели:



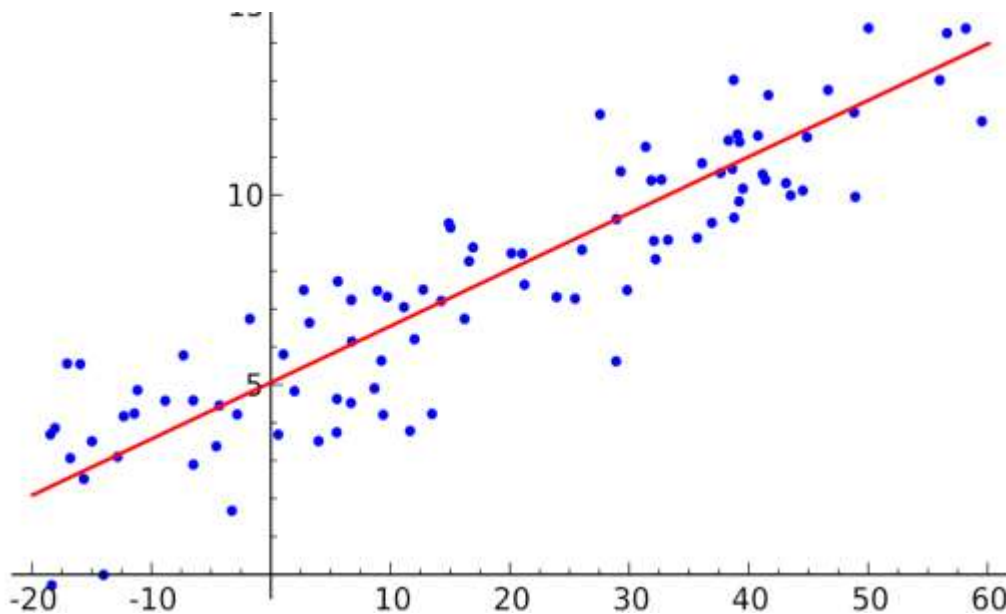
$$ma = F = kx$$



$$PV = \nu RT$$

Типы «простых» математических моделей

2) Регрессии



Данные: $(x_i, y_i), i=1...N$

Регрессия:

$$y=f(x,\theta)+\varepsilon$$

θ - параметры, ε - ошибка

Линейная рег.: $f=a+bx$,
 a и b – параметры (θ)

Квадратичная рег.: $f=a+bx+cx^2$,
 a, b и c – параметры (θ)

Существуют стандартные методы вычисления наилучших параметров θ по данным (x_i, y_i) («методы подгонки регрессии», «метод наименьших квадратов», и т.п.)

Типы «простых» математических моделей

3) Эволюционные модели: когда что-то изменяется во времени

- Часто такие модели описываются дифференциальными уравнениями
- Дискретно-алгебраический вариант

$$X(t+1)=f(X(t), \Theta, \dots), \quad t - \text{ время}$$

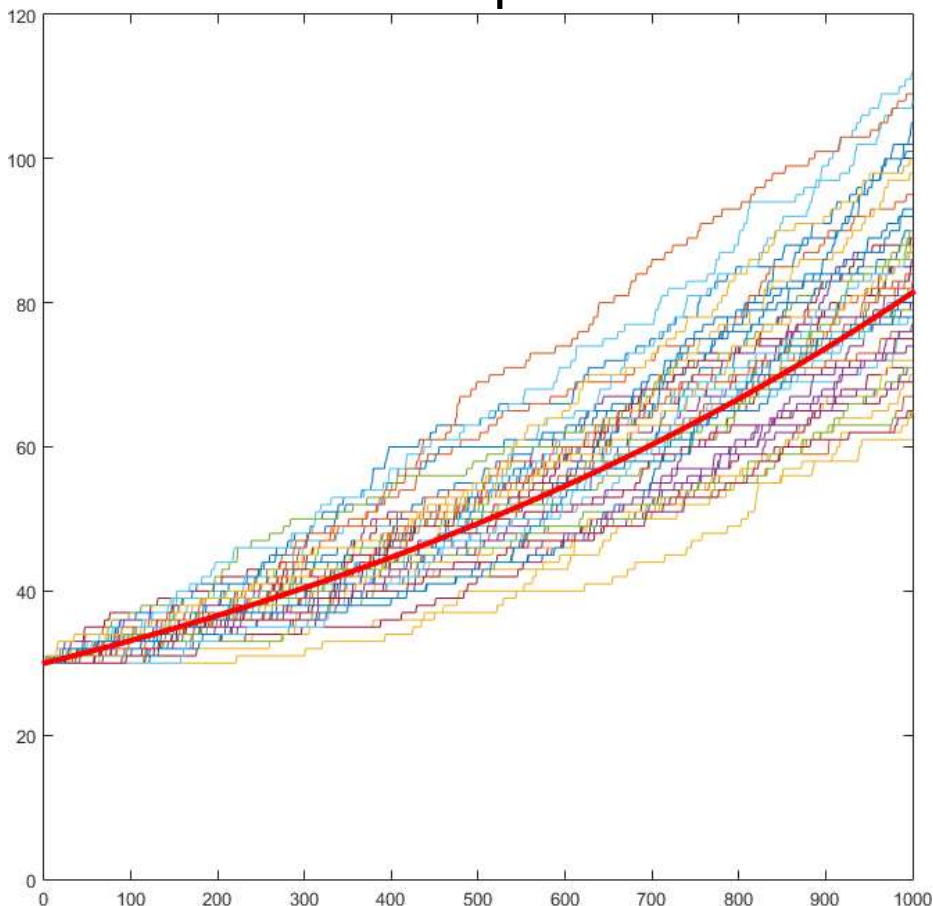
Например (модель Мальтуса – рост или вымирание популяции с удельной скоростью a):

$$X(t+1)=(1+a)X(t)$$

Типы «простых» математических моделей

4) Стохастические модели (модели с элементом случайности)

- Чисто вероятностные модели (на основе теории вероятностей) – вычисление вероятностей событий на основе



- Стохастический вариант эволюционных моделей: вместо скоростей процессов задаются их вероятности на каждом шаге

На графике: жирная линия – детерминированный «Мальтус», остальные линии – «стох. Мальтус» с той же скоростью роста a .

Типы «простых» математических моделей

5) Агентные (симуляционные) модели

- Создается «компьютерная игра», в которой некоторые сущности (агенты) взаимодействуют и создают какое-то сложное общее поведение.
- Агентные модели позволяют отобразить сложные схемы взаимодействия между агентами.
- Примеры (NetLogo):
 - формирование стай птиц на основе простых правил полёта каждой птицы
 - распространение инфекций в структурированных популяциях

Как создавать мат.модель

Создание мат.модели похоже на решение задачи по физике:

1. Надо понять, «что вообще происходит», какими «переменными» описывается ситуация/объект (т.е. создать «концептуальную модель»).
2. Определить законы/правила взаимосвязи между «переменными». Это могут быть и ранее известные законы, и какие-то приблизительные правила с неизвестными параметрами.
3. Если есть неизвестные параметры, оценить их из имеющихся данных («настройка модели на данные»).
4. Изучить свойства полученного математической модели (описания связей между «переменными»), получить полезные выводы о свойствах объекта изучения.

Что должно быть в КММ-статье

- Многие важные требования к КММ-статье описаны в Правилах конкурса. Прочтите их внимательно.
- Главная задача статьи – внятное описание проделанной работы и полученных результатов.
- В статье не должно быть излишней «воды», это запутывает читателя и не дает ему увидеть ваши реальные достижения.
- Один из главнейших критериев оценки работы – это обоснованность принятых в ней мат. модельных решений: следует объяснять, почему вы сделали так, а не иначе (кроме очевидных решений, разумеется). Даже если вы знаете «слабость» какого-то решения, об этом надо писать прямо.
- Внятная формулировка результатов
- В российских школах не обучают «scientific writing». Но всегда надо когда-то начинать и пытаться написать связный текст.

Спасибо за внимание!