Построение графиков дробно-квадратичных функций без привлечения аппарата математического анализа

Содержание

I. Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований.

Напомним, как зная график функции $y = f(x)$ построить график функции $F(x) = Af(ax+b)+B$.

1. $y = f(x-a)$, $a \neq 0$.	Параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц вправо, если $a > 0$, или на $\lvert a \rvert$ единиц влево, если $a < 0$.
2. $y = f(x) + B$, $B \neq 0$.	Параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy на B единиц вверх, если $B > 0$, или на $\lvert B \rvert$ единиц вниз, если $B < 0$.
3. $y = f(kx)$, $k > 0$, $k \neq 1$.	Сжать график $y = f(x)$ вдоль оси Ox в k раз, если $k > 1$ или растянуть в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$.
4. $y = f(-x)$.	Отразить график $y = f(x)$ относительно оси Oy.
5. $y = -f(x)$.	Отразить график $y = f(x)$ относительно оси Ox.
6. $y = Af(x)$, $A > 0$, $A \neq 1$.	Растянуть график $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз, если $A > 1$ или сжать его в $\frac{1}{A}$ раз, если $0 < A < 1$.

Таким образом, построение графика функции $y = Af(ax+b)+B$ по графику $y = f(x)$ можно провести по схеме:

$$f(x) \xrightarrow{3,4} f(ax) \xrightarrow{1} f(ax+b) \xrightarrow{6,5} Af(ax+b) \xrightarrow{2} Af(ax+b)+B.$$

II. Элементарное исследование функций для построения графиков

Напомним, что при построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование. Схема исследования функции с целью построения ее графика может быть такой:

- Область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции.
- Четность/нечетность функции.
- Периодичность функции
- Точки пересечения с осями (нули функции).
- Промежутки знакопостоянства.
- Асимптоты функции.
- Экстремумы и промежутки монотонности.
- Точки перегиба и промежутки выпуклости/вогнутости.
- Сводная таблица и таблица значений.

Эта схема примерная. Пункты исследования можно опускать, если они дают тривиальную информацию (если функция не является, например, периодичной или у неё нет асимптот, то можно об этом и не писать), или переставлять, в зависимости от конкретного графика (например, если область значений можно только в конце исследования).
Строить график лучше параллельно с исследованием функции, нанося на координатную плоскость информацию по завершении каждого пункта исследования.
Полное исследование пп. 7 и 8 требует знания производной (то есть, уже не элементарной математики). Однако для многих классов функций существуют элементарные методы (приёмы), позволяющие исследовать её на монотонность, найти экстремумы и построить *эскиз* графика.

Итак, условимся говорить, что в рассматриваемом промежутке функции $f(x)$ и $g(x)$ *изменяются в одном и том же направлении*, если они обе — возрастающие, или обе — убывающие; напротив, будем говорить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *изменяются в противоположных направлениях,* если одна из этих функций — возрастающая, а другая — убывающая.
Сформулируем ряд простейших свойств, которые помогают при исследованиях свойств функций (для их доказательств, по существу, нужно использовать только свойства сравнений двух чисел).

1. Функции f и $f+C$, где C — некоторое число, изменяются в одном направлении.

2. Функции f и Cf изменяются в одном и том же или противоположных направлениях, смотря потому, является ли C положительной или отрицательной постоянной.

3. Если функции f и g изменяются в одном и том же направлении, то сумма $f+g$ изменяется в том же направлении.

4. Если положительные функции f и g изменяются в одном и том же направлении, то произведение fg изменяется в том же направлении.

Напротив, если отрицательные функции f и g изменяются в одном и том же направлении, то произведение fg изменяется в противоположном направлении

В частности, если f — положительная функция, то f^2 изменяется в том же направлении, что и f; если f — отрицательная функция, то f^2 изменяется в противоположном направлении.

5. Функции f и $(-f)$ изменяются в противоположных направлениях.

6. Если функция f положительна на некотором промежутке, то функции f и $1/f$ изменяются в противоположных направлениях.

Если функция f отрицательна на некотором промежутке, то точно также функции f и $1/f$ изменяются в противоположных направлениях.

Можно, тем самым, сказать, что на всяком промежутке, где функция f не обращается в нуль и сохраняет знак, функции f и $1/f$ изменяются в противоположных направлениях.

7. Если функция f — положительная, то функции f и $\sqrt{f}$ изменяются в одном и том же направлении.

III. Исследование и построение графиков функций $y(x) = x - \dfrac{1}{x}$ **и** $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$**.**

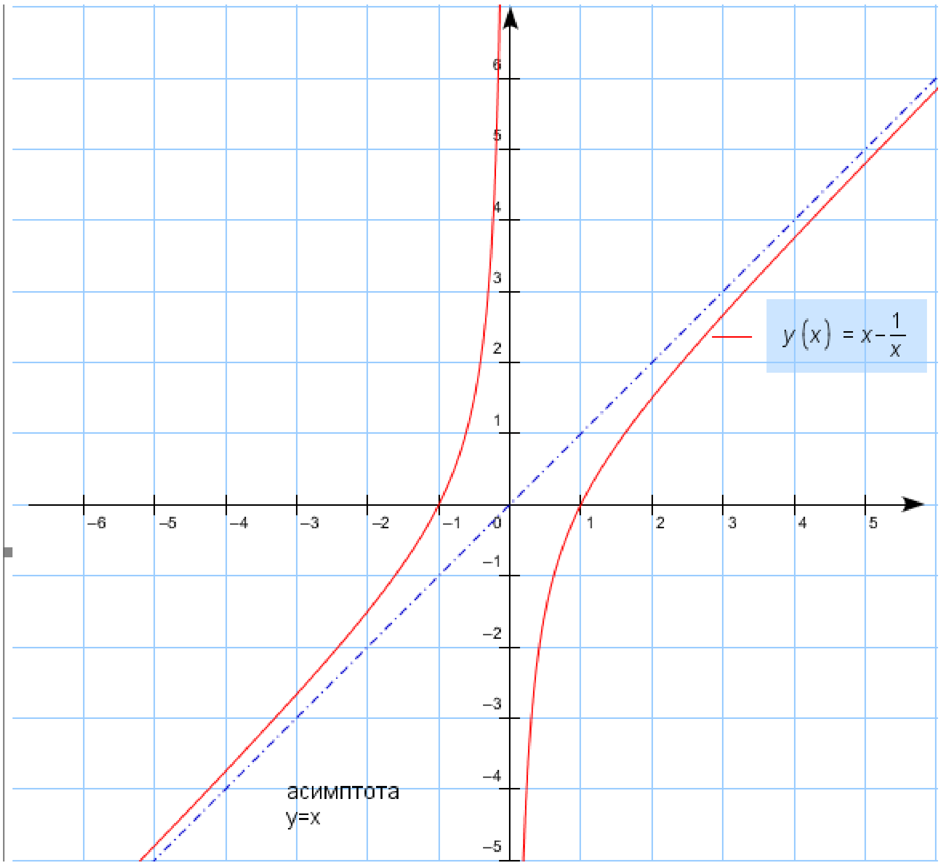
Рассмотрим функцию $y(x) = x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 1}{x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Эта функция нечётная (значит, её график симметричен относительно начала координат); определена всюду, кроме точки $x = 0$; обращается в нуль в точках $x = \pm 1$. Исследование на знак с помощью метода интервалов не представляет затруднений. См. рисунок.

Напомним, что *асимптотой* графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что *расстояние* от любой точки графика до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат. Существуют три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Наша функция $y(x) = x - \dfrac{1}{x}$ обладает двусторонней вертикальной асимптотой $x = 0$ и двусторонней наклонной асимптотой $y = x$. Исследуем на монотонность. Так как функция $y = x$ возрастающая, то в силу свойств 5 и 6 **п.II** $y = -\dfrac{1}{x}$ также возрастающая. В силу свойства 3 **п.II** их сумма, то есть функция $y(x) = x - \dfrac{1}{x}$, также возрастает.

Т.о. $y(x) = x - \dfrac{1}{x}$ возрастает на всей области определения. См. рисунок.

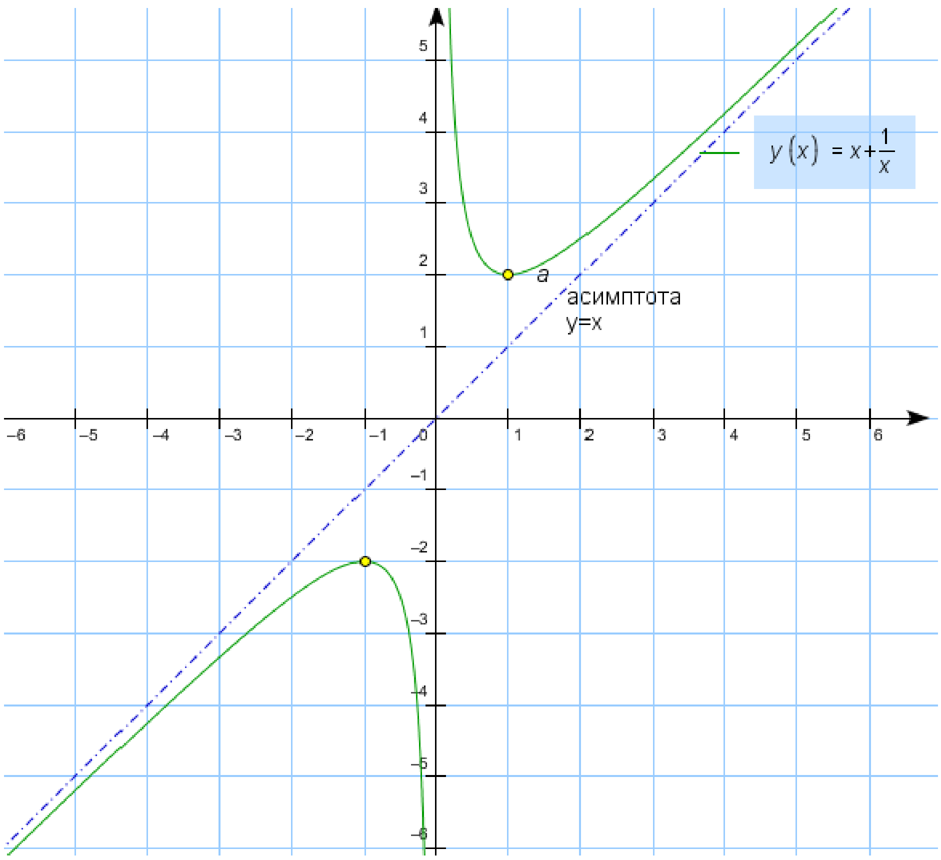


Что касается функции $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$, она также нечётная и в точке $x = 0$ терпит разрыв; обладает двусторонней вертикальной асимптотой $x = 0$ и двусторонней наклонной асимптотой $y = x$; в нуль нигде не обращается. Чтобы исследовать её на монотонность при $x > 0$ представим её в виде

$$y(x) = 2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2. \qquad (*)$$

Отсюда следует, что в точке $x = 1$ функция принимает значение равное 2, а для всех иных положительных значений аргумента — значения больше чем 2. Значит, в точке $x = 1$ функция имеет минимум равный 2.

Далее, так как при $x > 1$, функция $\sqrt{x}$ возрастающая, то в силу свойств 5 и 6 **п.II** функция $-\frac{1}{\sqrt{x}}$ также возрастающая. А так как, кроме того, в указанном промежутке $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$, то в силу свойства **4 п.II** и функция $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$ является возрастающей, а вместе с ней и функция (*). Аналогично можно установить, что $y(x) = x + \frac{1}{x}$ убывает в промежутке $(0,1)$ для чего функции (*) нужно придать вид: $y(x) = 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)^2$. Для отрицательных значений график строится отражением построенной части относительно начала координат.



IV. Дробно-квадратичные функции.

Функция вида

$$y(x)=\frac{Ax^2+Bx+C}{ax^2+bx+c}, \qquad (1)$$

определяемая *отношением* двух квадратных трехчленов, называется *дробно-квадратичной функцией*. При этом коэффициенты мы полагаем вещественными и такими, что

1) *хотя бы один* из коэффициентов A и a отличен от нуля, это можно записать как $A^2+a^2\neq 0$;

2) хотя бы одно из выражений $aB-Ab$ *и* $aC-Ac$ не обращается в нуль.

Условие 1) нужно для того, чтобы оба квадратных трехчлена — в числителе и в знаменателе — одновременно не выродились в линейные функции, а условие 2) — чтобы дробь в (1) была несократимой.[1]

Случай *дробно-линейной* функции проще, но должен быть рассмотрен отдельно (мы здесь не рассматриваем).

Покажем, что график *любой* функции вида (1) можно получить *элементарными преобразованиями*, описанными в **п.I,** либо из графика функции $y(x)=x+\frac{1}{x}$, либо из графика функции $y(x)=x-\frac{1}{x}$. Две последние функции мы уже исследовали в **п.III**.

Выделяя целую часть, (1) можно представить в виде:

$$y(x)=\frac{A}{a}\frac{x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}=\frac{A}{a}\frac{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}=\frac{A}{a}+\frac{A}{a}\frac{x(\frac{B}{A}-\frac{b}{a})+\frac{C}{A}-\frac{c}{a}}{\frac{ax^2+bx+c}{a}}=$$

$$=\frac{A}{a}+\frac{A}{a}\frac{x(aB-Ab)+aC-Ac}{A(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{a}+\frac{1}{\frac{a(ax^2+bx+c)}{x(aB-Ab)+aC-Ac}}.$$

Или

$$y(x)=\frac{A}{a}+\frac{1}{\frac{a(ax^2+bx+c)}{x(aB-Ab)+aC-Ac}}. \qquad (1^*)$$

Далее, мы будем рассматривать функцию в знаменателе под 1:

[1] Проверить самостоятельно.

$$z := \frac{a(ax^2+bx+c)}{x(aB-Ab)+aC-Ac}. \qquad (2)$$

Условие 2) нам обеспечивает неравенство нулю знаменателя этой функции.
Вдобавок мы потребуем
3) $a \neq 0$ и
4) $aB - Ab \neq 0$.
При нарушении условия 3) функция z вырождается в дробно-линейную, а при нарушении условия 4) — в квадратный трехчлен. Эти случаи мы уже умеем исследовать, поэтому мы их исключаем.
Итак, функция z имеет вид:

$$z = \frac{m}{n}\frac{x^2+\tilde{B}x+\tilde{C}}{x+p}, \text{ где } m \neq 0 \text{ и } n \neq 0. \qquad (2^*)$$

Преобразуем её далее, разложив числитель по степеням $(x+p)$:

$$z = \frac{m}{n}\frac{x^2+2px+p^2-2px-p^2+\tilde{B}x+\tilde{C}}{x+p} =$$

$$= \frac{m}{n}\frac{(x+p)^2+x(\tilde{B}-2p)+p(\tilde{B}-2p)-p(\tilde{B}-2p)+\tilde{C}-p^2}{x+p} =$$

$$= \frac{m}{n}\frac{(x+p)^2+(\tilde{B}-2p)(x+p)+p^2-\tilde{B}p+\tilde{C}}{x+p} = \frac{m}{n}\left(x+p+\tilde{B}-2p+\frac{p^2-\tilde{B}p+\tilde{C}}{x+p}\right).$$

Итак,

$$z = \frac{m}{n}\left(x+p+\tilde{B}-2p+\frac{p^2-\tilde{B}p+\tilde{C}}{x+p}\right). \qquad (3)$$

Заметим, что если число $K := p^2-\tilde{B}p+\tilde{C}$ равно нулю, то $(-p)$ есть корень числителя дроби в (2*). С другой стороны ясно, что $(-p)$ есть корень знаменателя дроби (2*). Следовательно, дробь можно сократить на $(x+p)$ и функция $z(x)$ вырождается в линейную. Строить линейные функции легко и приятно ☺.
Далее будем считать, что $K := p^2-\tilde{B}p+\tilde{C} \neq 0$.
Возможны два случая: $K > 0$ и $K < 0$.
Если $K > 0$, то запишем формулу (3) в виде:

$$z = \frac{m}{n}(\tilde{B}-2p) + \frac{m\sqrt{K}}{n}\left(\frac{x+p}{\sqrt{K}} + \frac{\sqrt{K}}{x+p}\right).$$

Откуда ясно, что график $z(x)$ получается из графика

$$y(x) = x + \frac{1}{x}$$

посредством преобразований, описанных в **п.I**.
Если $K < 0$, то запишем формулу (3) в виде:

$$z = \frac{m}{n}(\tilde{B} - 2p) + \frac{m\sqrt{|K|}}{n}\left(\frac{x+p}{\sqrt{|K|}} - \frac{\sqrt{|K|}}{x+p}\right),$$

Откуда ясно, что график $z(x)$ получается из графика

$$y(x) = x - \frac{1}{x}$$

также с помощью преобразований, описанных в **п.I**.

Графики $y(x) = x \pm \frac{1}{x}$ мы научились строить в **п.III**.

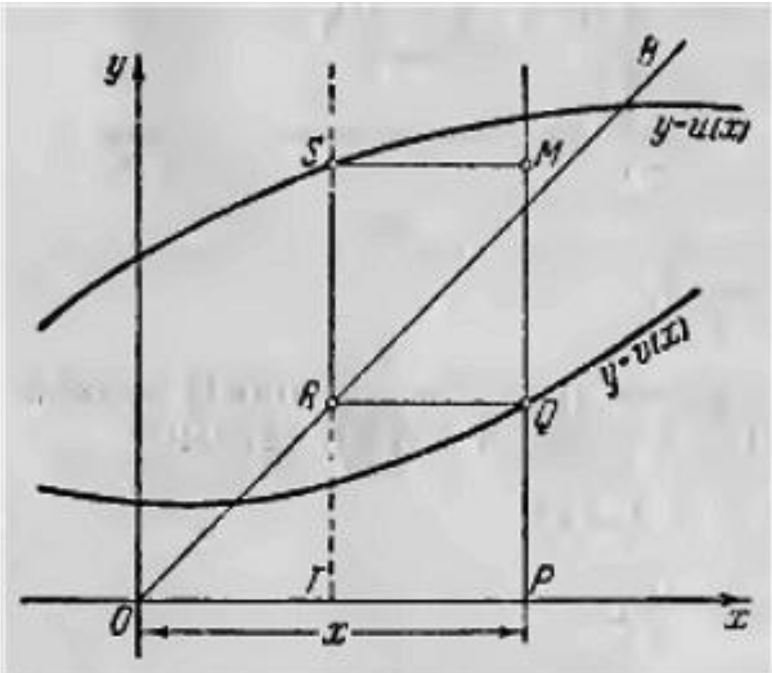
Итак, мы можем построить график $z(x)$ по формуле (2). Чтобы построить график исходной дробно-квадратичной функции осталось только научиться строить график $\frac{1}{z(x)}$.

Рассмотрим даже более широкую задачу.

Задача. Зная графики функций $y = u(x)$ и $y = v(x)$ построить график их композиции $y = u(v(x))$.

Комментарий. Задачу нужно понимать в том смысле, что нужно *уметь* построить *любую* точку графика $y = u(v(x))$ с помощью циркуля и линейки.

Решение. Пусть у нас построены графики $y = u(x)$ и $y = v(x)$. См. рисунок.



Возьмем произвольную точку $P(x,0)$.

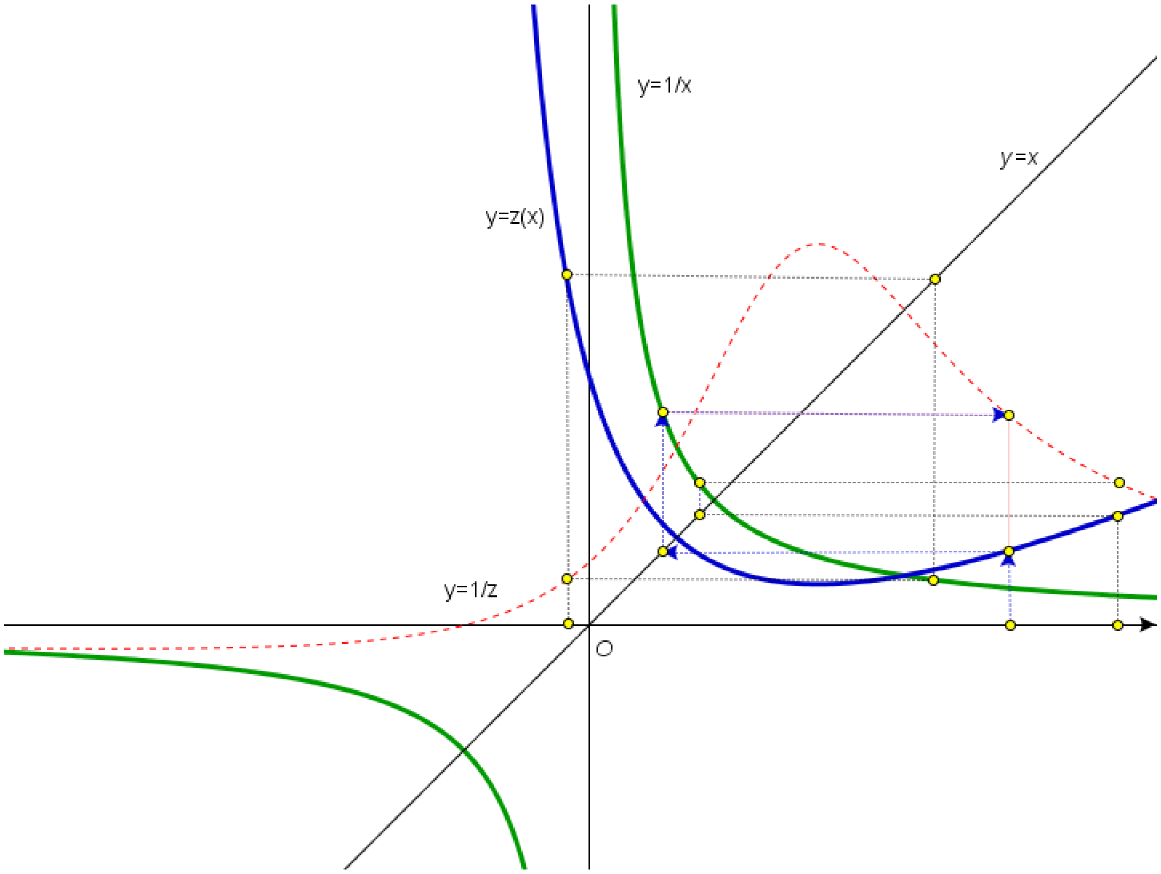
Проведём через неё вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y = v(x)$, получим точку Q с координатами $(x, v(x))$.

Спроектируем точку Q на биссектрису первого квадранта — прямую $y = x$; получим точку R с координатами $(v(x), v(x))$.

Проведем вертикаль через точку R до пересечения с графиком функции $y = u(x)$ получим точку S — её координаты $(v(x), u(v(x)))$.

Теперь осталось спроектировать точку S на вертикаль (PQ). Получим точку M с координатами $(x, u(v(x)))$, тем самым она принадлежит графику сложной функции $y = u(v(x))$. *Задача решена*.

Возвращаясь к построению графика функции $\frac{1}{z(x)}$, заметим, что она есть результат композиции двух функций: функции $z(x)$, график которой мы научились строить выше, и функции $\frac{1}{x}$, график которой есть хорошо известная гипербола. См. рисунок ниже.



Литература

1. *Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд*. Математический анализ, М.: "Просвещение", 1973 (глава III, параграф 2, пп. 5, 10-12).
2. *И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, Э.Э. Шноль*. Функции и графики, М.: "Наука", 1986 (параграф 7).
3. Энциклопедия элементарной математики, книга III, Функции и пределы, М.-Л., ГТТИ, 1952 (статья В.Л. Гончарова "Элементарные функции действительного переменного", гл. II, параграфы 15-16).
4. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И* Учебник….1990