Метод координат

Напомним, что прямоугольными декартовыми координатами точки на плоскости называются координаты проекций этой точки на оси координат. Между точками M плоскости и парами чисел (x, y) существует взаимно однозначное соответствие, т.е. соответствие, при котором каждой точке соответствует одна пара чисел и каждой паре чисел соответствует некоторая точка плоскости, причем разным точкам соответствуют разные пары. Записывают это так: $M(x, y)$.

Если числа x и y произвольно меняются от 0 до ∞, то соответствующая точка M может лежать в любом месте плоскости. Если же точки таковы, что между их координатами существует определенное соотношение, то они лежат не произвольно, а образуют на плоскости некоторое множество. Например, совокупность точек $M(x, y)$, у которых $x > 0$ и $y > 0$, образуют «первый квадрант», или «первую четверть» плоскости; точки, у которых $x < 0$, $y > 0$, лежат во «втором квадранте»; совокупность точек, координаты которых связаны неравенством $x^2 + y^2 \leq R^2$, представляет собой круг с радиусом R и центром в начале координат; совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x = y$, является биссектрисой первого и третьего квадрантов и т.д.

Прямую на плоскости можно задать несколькими способами:

1) $Ax + By + C = 0$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$, $A, B, C \in R$ – общее уравнение прямой (полное);
2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ – уравнение в отрезках (см. рис.1);
3) $y = kx + d$, $k = tg\frac{b}{a}$ (см. рис. 1) – уравнение с угловым коэффициентом.

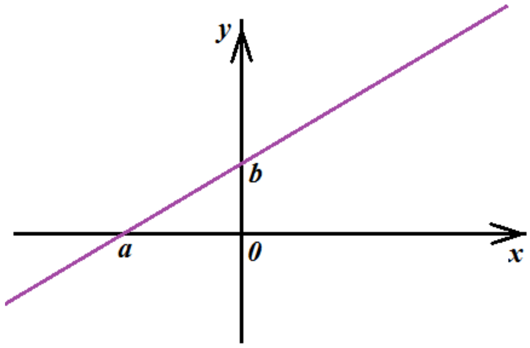

Рис. 1

Две прямые параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, или $k_1 = k_2$; прямые перпендикулярны, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, или $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Пусть даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Середина отрезка AB имеет координаты

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2); \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Расстояние D между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ выражается через координаты этих точек формулой:

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Расстояние D между параллельными прямыми $y = kx + d$ и $y = kx + m$ (см.рис.2) равно

$$D = |d - m|\frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Расстояние между точкой (x_0, y_0) и прямой $y = kx + d$ может быть найдено одним из трех способов:

а) проводим через заданную точку прямую, параллельную данной и ищем расстояние между прямыми;

б) проводим через заданную точку прямую, перпендикулярную данной, ищем точку пересечения прямых и затем расстояние между точками;

в) по формуле (см. рис. 3) $D = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где прямая задана в общем виде $Ax + By + C = 0$.

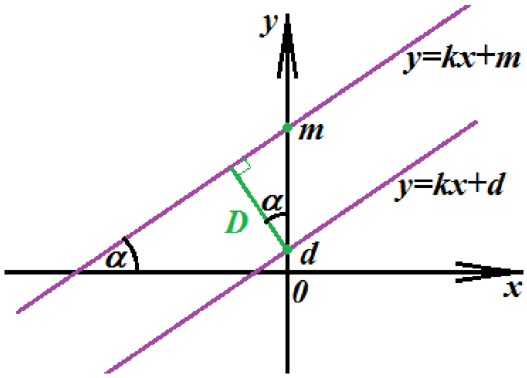

Рис. 2

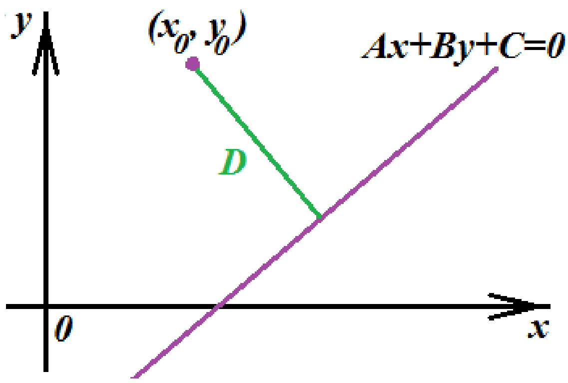

Рис. 3

Применение метода координат может быть альтернативным, а иногда и более удобным способом решения задачи. В частности, методом удобно пользоваться, если:

1) в формулировке задачи содержится упоминание о системе координат (явное или неявное);

2) в задаче требуется найти расстояние или длину отрезка.

Определившись с методом решения задачи останется только удобно выбрать точку начала координат и направление осей, чтобы уравнения были по возможности более простыми.

Также удобно и отыскание геометрических мест с помощью метода координат, потому что каждое свойство, которое выделяет геометрическое место точек, алгебраически выражается одним или несколькими соотношениями между координатами точек, принадлежащих этому геометрическому месту. С другой стороны, всякое соотношение (или система соотношений) между координатами x и y точек плоскости определяют множество, которое можно рассматривать как геометрическое место точек, обладающих свойством, выражаемым этим соотношением.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим несколько задач.

Пример 1. Каким соотношением между координатами точек, образующих окружность с центром в точке O и радиусом R, записывается это геометрическое место?

Решение. Введем систему координат так, что точка O получит координаты (x_0, y_0). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка окружности. Тогда расстояние OM равно R. Имеем:

$$D^2 = OM^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $D = R$ при любых x и y, то координаты точек окружности должны удовлетворять соотношению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

которое и представляет собой координатную запись данного геометрического места точек. Это соотношение называется **«уравнением окружности»** с центром в точке $O(x_0, y_0)$ и радиусом R.

Пример 2. На плоскости даны две точки A и B. Найти геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A в k раз больше, чем расстояние до точки B.

Решение. Введем на плоскости систему прямоугольных координат так, чтобы точки A и B лежали на оси абсцисс, а начало координат, точка O, находилось в центре отрезка AB (рис. 4). Если обозначить при этом длину отрезка AB через $2a$, то точки A и B получат координаты: $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$.

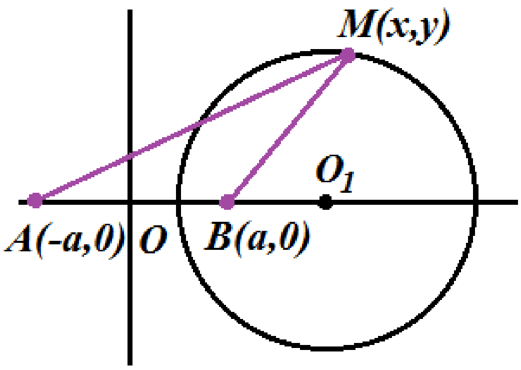

Рис. 4

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка, принадлежащая искомому геометрическому месту. Тогда

$$MA^2 = (x+a)^2 + y^2,$$
$$MB^2 = (x-a)^2 + y^2$$

и соотношение, определяющее геометрическое место точек, имеет вид:

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} k$$

или более просто:

$$x^2(k^2-1) + y^2(k^2-1) - 2ax(k^2+1) = a^2(1-k^2).$$

Если $k = 1$, то отсюда следует, что $x = 0$. Это показывает, что геометрическим местом точек, равноудаленных ($k = 1$) от точек A и B, является срединный перпендикуляр к отрезку AB, ось ординат.

Если $k \neq 1$, то можно разделить обе части уравнения на $k^2 - 1$. Получим:

$$x^2 - 2xa\frac{k^2+1}{k^2-1} + y^2 = -a^2.$$

Дополняя первые два члена левой части этого уравнения до полного квадрата разности двух чисел, перепишем его в следующем виде:

$$\left(x - a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ak}{k^2-1}\right)^2.$$

Это уравнение описывает окружность с центром в точке O_1:

$$O_1\left(a\frac{k^2+1}{k^2-1}, 0\right)$$

и радиусом $R = \frac{2ak}{k^2-1}$.

Полученную окружность называют «окружностью Аполлония». Она представляет собой геометрическое место точек, расстояния от которых до двух заданных точек плоскости относятся как k. Окружность Аполлония легко построить, приняв во внимание, что ее центр лежит на прямой, проходящей через заданные точки, а сама окружность делит отрезок между ними внутренним и внешним образом на части в отношении $k:1$.

Пример 3. На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную неравенством $x^2 + y^2 + 6(x - |y|) \leq 0$. Найти площадь этой фигуры.

Решение. Так как в условии задачи идет речь о координатной плоскости, то выбор метода решения очевиден.

Теперь разберемся с понятием модуля: по определению $|y| = y$, если $y \geq 0$, и $|y| = -y$, если $y < 0$. Рассмотрим оба случая.

Случай $y \geq 0$. Неравенство приобретает вид: $x^2 + y^2 + 6(x - y) \leq 0$, перепишем его:

$$x^2 + 6x + y^2 - 6y \leq 0,$$

добавим в левую и правую части по 18, тогда

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \leq 18$$

или

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 \leq 18.$$

Это неравенство описывает круг с центром в точке $(-3{,}3)$ и радиусом $3\sqrt{2}$ (см. рис. 5).

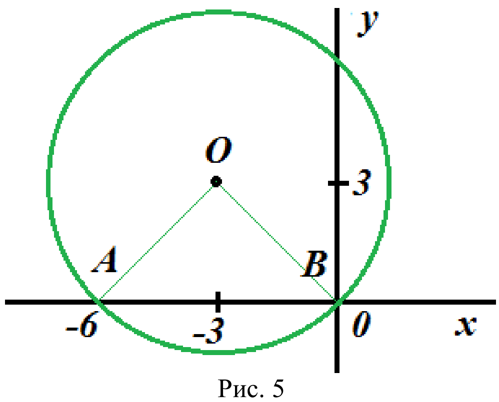

Рис. 5

Очевидно, что уравнение окружности $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 18$ пересекает ось Ox в точках $A(-6{,}0)$ и $B(0{,}0)$. Учитывая координаты точек O, A и B, приходим к выводу, что треугольник OAB – прямоугольный. Искомой фигурой в этом случае будет сегмент, расположенный над осью Ox, площадь его будет состоять из ¾ площади круга и площади треугольника OAB, а именно: $\frac{3}{4}\pi\left(3\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\right)^2=9\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)$.

Случай $y<0$ рассматривается аналогично. Объединяя получившиеся фигуры, получаем требуемое (см. рис. 6), с площадью $9\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)\cdot 2=9(3\pi+2)$.

Ответ: $9(3\pi+2)$.

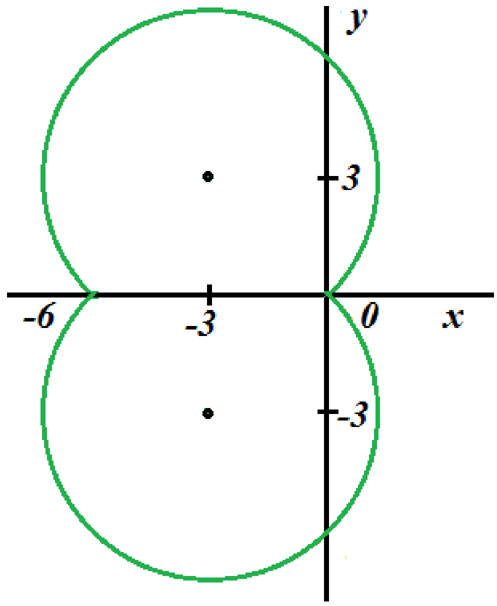

Рис. 6