§3. Комбинаторика.

В этом параграфе мы будем изучать задачи, в которых нужно найти число вариантов для того или иного события.

Правило произведения. Если мы можем выбрать элемент a m способами, элемент b n способами, то пару (a, b) мы можем выбрать mn способами.

Доказательство. Обозначим возможные варианты a через $a_1, a_2, \ldots, a_m$, b через $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Выпишем все возможные варианты:

$$\begin{array}{ccc} (a_1, b_1) & \ldots & (a_1, b_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, b_1) & \ldots & (a_m, b_n) \end{array}$$

У нас m строк и n столбцов, то есть mn элементов.

Задача 1. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя только цифры 1, 2, 3, 4, 5 (цифры могут повторяться)?

Решение. Каждую из четырех цифр четырехзначного числа можно выбрать пятью способами. Соответственно, число мы можем составить $5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5 = 625$ способами.

Ответ: 625.

Задача 2. Сколько целых положительных делителей у числа 2400?

Решение. Разложим число на простые множители, получим $2400 = 2^5{\cdot}3{\cdot}5^2$. Делитель числа 2400 имеет вид $2^i{\cdot}3^j{\cdot}5^k$, где $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $j \in \{0, 1\}$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Таким образом, i мы можем выбрать шестью способами, j — двумя способами, k — тремя способами. Число делителей равно $6{\cdot}2{\cdot}3 = 36$.

Ответ: 36.

Факториалом натурального числа n называется произведение $n! = n(n-1)(n-2){\cdot}\ldots{\cdot}2{\cdot}1$. Для удобства записи определим $0! = 1$.

Задача 3. Сколькими способами можно выстроить n человек в очередь?

Решение. Первого человека можно выбрать n способами, второго — $n-1$ способами (одного человека уже выбрали, осталось $n-1$), третьего — $n-2$ способами и т. д. Предпоследнего можно выбрать двумя способами, последнего — одним. Таким образом, имеем $n(n-1)(n-2){\cdot}\ldots{\cdot}2{\cdot}1 = n!$ способов.

Ответ: $n!$.

Задача 4. Сколько можно получить различных чисел, переставляя цифры числа 23456?

Решение. Первую цифру числа можно выбрать пятью способами, вторую — четырьмя (одну цифру уже выбрали), третью — тремя, четвертую — двумя, пятую — одним. То есть, можно получить $5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 5! = 120$ чисел.

Ответ: 120.

Задача 5. Сколько различных слов из пяти букв можно получить, переставляя буквы слова *ОЛОВО*?

Решение. Пять различных букв мы можем переставить $5!$ способами. Но у нас есть одинаковые буквы. Обозначим их $O_1O_2O_3ЛВ$. Из них можно составить $5!$ слов. Если стереть индексы, то окажется, что каждое слово встречается по $3! = 6$ раз (количество способов переставить три буквы равно шести). Например, $ЛВO_1O_2O_3$, $ЛВO_1O_3O_2$, $ЛВO_2O_1O_3$, $ЛВO_2O_3O_1$, $ЛВO_3O_1O_2$ и $ЛВO_3O_2O_1$. Следовательно, у нас $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ различных слов.

Ответ: 20.

Задача 6. Сколькими способами можно выбрать 2 элемента из 7-элементного множества?

Решение. Первое число мы можем выбрать семью способами, второе — шестью способами (любой из оставшихся). То есть $7\cdot 6 = 42$ способами. Но при таком подсчете мы учли каждую пару ровно 2 раза, например, у нас есть $\{1,2\}$ и $\{2,1\}$. Следовательно, ответ $42/2 = 21$.

Ответ: 21.

Задача 7. Сколькими способами можно выбрать k элементов из n-элементного множества $(k \le n)$?

Решение. Первое число мы можем выбрать n способами, второе — $n-1$ способами, третье — $n-2$ способами и т. д. То есть упорядоченный набор из k элементов мы можем выбрать

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

способами. Но нам нужен неупорядоченный (не пронумерованный) набор элементов.

Посчитаем, сколькими способами мы можем расположить в ряд k различных элементов. На первое место мы ставим любой из k элементов, на второе — один из $k-1$ оставшихся и т.д. У нас получится $k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = k!$ способов.

Таким образом, вычисляя количество k-элементных в подмножеств n-элементном множестве, мы посчитали каждое подмножество $k!$ раз. Следовательно, ответ $\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ответ: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Число, полученное в задаче 7, называется *числом сочетаний* и обозначается $c_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Замечание. Из определения следует, что $c_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = c_n^{n-k}$.

Задача 8. Сколькими способами можно выбрать пять школьников из тридцати для проверки домашнего задания?

Решение. Количество школьников равно $c_{30}^5 = \frac{30!}{5!\cdot 25!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 29\cdot 7\cdot 27\cdot 26 = 142506$.

Ответ: 142506.

Утверждение. Среди чисел $1, 2, 3, \dots N$, количество чисел, делящихся на k, равно $\left[\frac{N}{k}\right]$, где $[x]$ — целая часть числа x.

Доказательство. Найдем самое большое число из чисел $1, 2, 3, \dots N$, которое делится на k. Это число $\left[\frac{N}{k}\right]\cdot k \le \frac{N}{k}\cdot N = N$ (следующее число, делящееся на k, равно $(\left[\frac{N}{k}\right]+1)\cdot k > \frac{N}{k}\cdot k = N$).

Таким образом, искомые числа $k, 2k, 3k, \dots, \left[\frac{N}{k}\right]\cdot k$; их всего $\left[\frac{N}{k}\right]$.

Задача 9. Среди чисел от 1 до 100 сколько чисел не делятся на 3?

Решение. Количество чисел, делящихся на 3 равно $[\frac{100}{3}] = 33$. Следовательно, $100 - 33 = 67$ чисел не делятся на 3.

Ответ: 67.

Напомним метод включения-исколючения (см. тему 9 для 9 класса).

Теорема (Метод включения-исключения для двух множеств). Пусть A_1 и A_2 — конечные множества. Тогда верно равенство $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Замечание. $|A|$ — количество элементов в множестве A.

Доказательство теоремы. В сумме $|A_1| + |A_2|$ элементы пересечения $A_1 \cap A_2$ посчитаны дважды. Поэтому, для того чтобы посчитать количество элементов в объединении множеств, из суммы $|A_1| + |A_2|$ вычитаем количество элементов объединения.

Теорема (Метод включения-исключения для трех множеств). Пусть A_1, A_2 и A_3 — конечные множества. Тогда верно равенство

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Теорема (Метод включения-исключения). Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества. Тогда верно равенство

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \; - \; (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) \; +$$

$$+ \; \ldots \; + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Теорема доказывается по индукции.

Задача 10. Сколько существует целых чисел от 1 до 100, которые не делятся ни на 3, ни на 5?

Решение. Обозначим через A_k множество чисел от 1 до 100, которые не делятся на k. Тогда $|A_3| = [\frac{100}{3}] = 33$, $|A_5| = [\frac{100}{5}] = 20$.

Так как существуют числа, которые делятся и на 3 и на 5, то множества A_3 и A_5 пересекаются. Их пересечением является множество A_{15}, $|A_{15}| = [\frac{100}{15}] = 6$.

Итак, количество чисел, которые не делятся ни на 3, ни на 5 равно

$$100 - |A_3| - |A_5| + |A_{15}| = 100 - 33 - 20 + 6 = 53.$$

Ответ: 53.