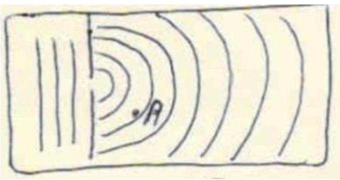
Волны. Лекция 2

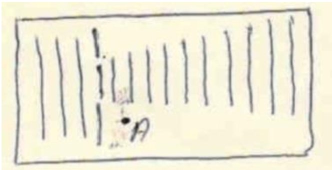
Дифракция волн. Принцип Гюйгенса – Френеля

Поведение волны вблизи препятствия сильно зависит от соотношения между длиной волны и размерами препятствия. Так, волна от брошенного в пруд камня легко огибает торчащий из воды прутик, и только препятствие большого по сравнению с длиной волны размера дает за собой тень: волны за него практически не проникают (хотя и здесь бывают исключения). Способностью огибать препятствия обладают и звуковые волны. Например, мы слышим сигнал находящейся за домом машины.

Определение. Огибание волнами препятствий называется *дифракцией*.



Дифракция присуща любому волновому процессу в той же мере, как и интерференция. Очень наглядно можно проследить за дифракцией волн на поверхности воды, если поставить на пути волн экран с узкой щелью, размеры, которой меньше длины волны. При этом будет хорошо видно, что за экраном распространяется круговая волна, как если бы в отверстии экрана располагалось колеблющееся тело – источник волн. Согласно принципу Гюйгенса так и должно быть: вторичные источники в узкой щели располагаются столь близко друг к другу, что их можно рассматривать как один точечный источник.



Если размеры щели велики по сравнению с длиной волны, то картина распространения волн за экраном совершенно иная: волна проходит сквозь щель, почти не меняя своей формы. Только по краям можно заметить небольшие искривления волновой поверхности, благодаря которым волна частично проникает в пространство за экраном.

Принцип Гюйгенса в его первоначальной формулировке позволяет качественно понять, почему происходит дифракция: вторичные волны, испускаемые участками среды, проникают за края препятствия, расположенного на пути распространения волны. Однако он не может объяснить дифракцию количественно. Так, например, из принципа Гюйгенса совершенно не понятно, почему в случае небольшого отверстия волна проникает в область точки A, а в случае большего отверстия – не проникает (см. рисунки). Иными словами, принцип Гюйгенса нуждался в уточнении, которое и было сделано французским учёным О. Френелем в начале 19-го века. Согласно идее Френеля: ***результирующее волновое возмущение в данной точке пространства является следствием интерференции элементарных вторичных волн Гюйгенса***.

Объединение принципа Гюйгенса и идеи Френеля часто называют **принципом Гюйгенса – Френеля**. Его применение мы рассмотрим позже на примере электромагнитных волн.

Связь между переменными электрическим и магнитным полями. Электромагнитные волны и их свойства. Плотность потока энергии волны

Мы уже знаем, что в явлении электромагнитной индукции Максвелл увидел порождение переменным магнитным полем вихревого электрического поля.

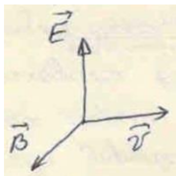
Далее Максвелл сделал следующий и последний шаг в открытии основных свойств электромагнитного поля. Он поставил вопрос: если переменное магнитное поле порождает электрическое поле, то не существует ли в природе обратного процесса, когда переменное электрическое поле в свою очередь порождает магнитное?

Максвелл допустил, что такого рода процесс реально происходит в природе: *во всех случаях, когда электрическое поле меняется со временем, оно порождает магнитное поле*.

Это означает, что переменное электрическое поле является таким же источником магнитного поля, как и обычный ток, создаваемый движущимися электрическими зарядами. Обычный ток, которому эквивалентно переменное электрическое поле с точки зрения создания магнитного поля, называют *током смещения*.

Из гипотезы Максвелла немедленно следует, что однажды начавшийся в некоторой точке процесс изменения электромагнитного поля будет перемещаться во всё новые области окружающего пространства. Распространяющееся переменное электромагнитное поле и есть бегущая электромагнитная волна. Из теории Максвелла вытекает ряд важных следствий, которые мы сформулируем без доказательства:

1) в однородной изотропной среде (в частности, в свободном пространстве) у бегущей электромагнитной волны любой формы вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости перпендикулярной направлению распространения волны, то есть электромагнитная волна является поперечной. Причём направление вектора $[\vec{E},\vec{B}]$ в этих случаях всегда совпадает с направлением распространения волны.



2) Скорость распространения электромагнитной волны в однородной изотропной среде равна:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}},$$

где ε и μ – электрическая и магнитная проницаемости вещества соответственно, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. В вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) скорость электромагнитной волны

$$v_{\text{в}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2{,}998 \cdot 10^8 \, {}^{\text{м}}/_{\text{с}} \approx 3 \cdot 10^8 \, {}^{\text{м}}/_{\text{с}} = 300.000 \, {}^{\text{км}}/_{\text{с}}.$$

Скорость электромагнитной волны в вакууме как фундаментальная величина обозначается буквой c. Итак,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

В диэлектрике ($\mu \approx 1$) скорость электромагнитной волны

$$v = {}^{c}\!/_{\sqrt{\varepsilon}}.$$

3) В одной и той же точке изотропной и однородной среды в один и тот же момент времени величины векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ связаны соотношением:

$$vB = E, \ \text{т.е. } cB = \sqrt{\varepsilon\mu}\, E$$

Как известно, плотности энергии электрического и магнитного полей равны соответственно:

$$w_\text{э} = {}^{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}\!/_{2}, \ \ w_\text{м} = {}^{B^2}\!/_{(2\mu\mu_0)}.$$

Так как в электромагнитной волне $B = \sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}E$, то

$$w_\text{м} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 E^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = w_\text{э}.$$

Таким образом, ***плотности энергии электрической и магнитной компонент электромагнитного поля в бегущей электромагнитной волне равны между собой в каждой точке пространства и в каждый момент времени***!

В этом заключается принципиальное отличие бегущих волн от локализованных электромагнитных и механических колебаний. При колебаниях, как известно, “потенциальная” (электрическая) и кинетическая (“магнитная”) энергии изменяются в противофазе, переходя друг в друга. В бегущей же волне колебания кинетической и потенциальной энергий происходят по одинаковому закону, как во времени, так и в пространстве. Причём это является общим свойством всех (а не только электромагнитных) бегущих волн. При этом энергия бегущей волны не остаётся локализованной: она перемещается вместе с волной, с её скоростью v. Зная выражение для объемной плотности энергии волны w, легко найти поток энергии $\Delta\Phi_w$, переносимый волной за малое время Δt через площадку ΔS, *перпендикулярную* направлению распространения волны:

$$\Delta\Phi_w = w \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t.$$

Величину

$$j = \frac{\Delta\Phi_w}{\Delta S \cdot \Delta t} = wv$$

называют (***мгновенной***) ***плотностью потока энергии волны***. Она имеет смысл энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Это векторная величина: направление вектора $\vec{j}$ совпадает с направлением переноса энергии, которое в простейшем случае изотропных сред совпадает с направлением распространения волны.

Общее представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено Н. А. Умовым в 1874 г. Поэтому вектор плотности потока энергии без конкретизации её физической природы часто называют ***вектором Умова***. Конкретизируем выражение для вектора Умова применительно к электромагнитной энергии, переносимой электромагнитной бегущей волной. Учитывая, что в бегущей электромагнитной волне

$$B = \frac{1}{v} E$$

для объемной плотности энергии волны w получим:

$$w = w_{\text{э}} + w_{\text{М}} = 2\frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{1}{v} E \cdot \frac{B}{\mu\mu_0}.$$

И, следовательно,

$$j \equiv wv = E \cdot \frac{B}{\mu\mu_0}.$$

Как уже говорилось выше, направление распространения бегущей электромагнитной волной впадает в однородной изотропной среде с направлением вектора $[\vec{E} \times \vec{B}]$, а вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в этом случае взаимно перпендикулярны. Поэтому вектор $\vec{j}$ для электромагнитной бегущей волны, очевидно, определяется выражением:

$$\vec{j} = \left[\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}\right].$$

Этот вектор называется ***вектором Пойтинга***, по имени учёного, разработавшего в 1885 году, идеи Умова применительно к электромагнитной энергии.

Обычно в электродинамике наряду с вектором $\vec{B}$ индукции магнитного поля, вводят ещё вектор $\vec{H}$ напряженности магнитного поля. В изотропных средах:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}.$$

Поэтому выражение для вектора Пойтинга обычно записывают в виде:

$$\vec{j} = [\,\vec{E}\,\vec{H}\,].$$

Дело в том, что такая форма записи оказывается справедливой и для анизотропных сред.

Поскольку при распространении электромагнитной волны значения $\vec{E}$ и $\vec{B}$ $(\vec{H})$ в данной точке постоянно изменяются, то изменяется и мгновенная плотность потока энергии. Поэтому перенос энергии волной удобнее характеризовать средней по времени мгновенной плотностью потока энергии, которую называют ***интенсивностью волны***.

Рассмотрим теперь кратко сферическую электромагнитную волну, т.е. волну, волновые поверхности, которой представляют собой концентрические сферы. В отсутствии поглощения энергии в среде легко определить зависимость амплитуды сферической волны от расстояния до центра. Поскольку в этом случае поток энергии волны, пропорциональный квадрату амплитуды, должен быть одинаковым через любую сферу, то интенсивность сферической волны убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r от центра, а ее амплитуда – убывает обратно пропорционально r.

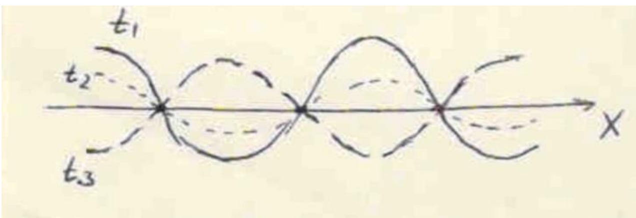
Стоячие волны

Пусть в натянутом шнуре в положительном направлении оси x распространяется поперечная синусоидальная волна $S_1 = a_1 \cos(\omega t - kx)$, а в отрицательном направлении оси x – волна $S_2 = a_2 \cos(\omega t + kx)$. Вторую волну можно получить, например, при отражении от конца шнура первой волны. Поэтому волну S_1 можно назвать падающей, а волну S_2 – отраженной. Никакой добавочной фазы в выражение для отраженной волны можно не вводить, если условиться помещать начало координат в точке шнура, в которой падающая и отраженная волны имеют одинаковые фазы, что и предполагается в дальнейшем. Предположим, что отражение полное, т.е. амплитуды, падающей и отраженной волн одинаковы: $a_1 = a_2 = a$. От наложения (интерференции) таких волн возникает возмущение

$$S = S_1 + S_2 = 2a \cos kx \cdot \cos \omega t, \qquad (1)$$

называемое ***стоячей волной***. В этом возмущении каждая точка шнура, характеризуемая координатой x, совершает гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой $2a|\cos kx|$. Амплитуда таких колебаний обращается в нуль в тех точках, где $\cos kx = 0$.

Такие точки называют ***узлами смещения***. Посередине между двумя соседними узлами амплитуда колебаний максимальна и равна 2а. Соответствующие точки называют ***пучностями смещения***.



Расстояние Δx между двумя соседними узлами или пучностями определяется из условия $k\Delta x = \pi$, откуда

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \lambda/2.$$

Все точки между двумя соседними узлами колеблются в одинаковых фазах: они одновременно проходят через положение равновесия и одновременно достигают максимума. При переходе через узел знак S меняется на противоположный (при фиксированном t).

Это значит, что *при этом фаза колебаний скачкообразно изменяется на* π. Однако такой скачок не ведёт к нарушению непрерывности колебательного процесса, т.к. он совершается при нулевой амплитуде.

Узлы смещения как бы разделяют шнур на автономные области, в которых совершаются независимые гармонические колебания. Никакой передачи движения от одной области к другой, и, следовательно, перетекания энергии через узлы не происходит. Иначе говоря, нет никакого распространения возмущения вдоль шнура. Вот почему возмущение, представляемое выражением (1), называется стоячей волной.

Заметим ещё, что в фиксированный момент времени t в узлах смещения максимальны производные dS/dx, т.е. максимальна деформация шнура, а в пучностях смещения $dS/dx = 0$. Поэтому *узлы смещения являются пучностями деформации, а пучности смещения – узлами деформации*.

Выше мы рассуждали так, как если бы длина шнура была не ограничена (полубесконечный шнур). В этом случае частота ω, и, следовательно, длина волны $\lambda = 2\pi\upsilon/\omega$ могут быть любыми. Не то будет, когда оба конца шнура закреплены. Если в шнуре с закреплёнными концами возбудить какое-то произвольное возмущение и затем предоставить его самому себе, то это возмущение побежит в обе стороны и начнёт отражаться от концов шнура. В результате в шнуре возникнет довольно сложное нестационарное движение.

Стационарное движение в виде стоячей волны в этом случае будет возможно лишь при вполне определённых частотах (и, следовательно, длинах волн). Дело в том, что на закреплённых концах шнура должны выполняться определённые граничные условия: в них смещение S все время должно равняться нулю. Значит, если в шнуре возбуждена стоячая волна, то концы шнура должны быть её узлами. Отсюда следует, что на длине шнура ℓ должно укладываться целое число полуволн: $\ell = n\lambda/2$, откуда

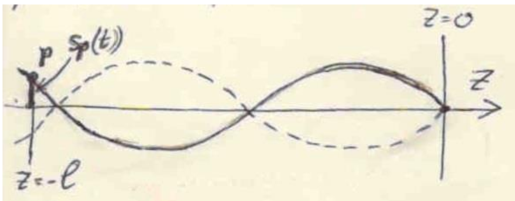
$$\lambda = \frac{2\ell}{n}, \quad \omega_n = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda} = \frac{\pi\upsilon}{\ell}n, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{\ell},$$

где целое число n может быть любым. Получается бесконечный набор возможных типов стационарных колебаний, которому соответствует дискретный ряд частот. Эти колебания называются ***собственными*** или ***нормальными колебаниями*** шнура. В шнуре возможных типов нормальных колебаний получилось бесконечно много. Это связно с тем, что шнур является непрерывной системой и имеет бесконечное число степеней свободы. Собственное колебание с наименьшей частотой $\omega = \pi\upsilon/\ell$ называется ***основным колебанием***, все остальные собственные колебания – ***обертонами*** или ***гармониками***. При произвольном начальном возмущении шнура в нём будет возникать свободное колебание, которое всегда можно представить как суперпозицию его нормальных колебаний (это утверждение доказывается чисто математически на основе представлений о ряде Фурье). При этом движение каждой точки струны будет представлять собой сумму нескольких (в общем случае бесконечного числа) гармонических колебаний различных амплитуд с частотами из набора собственных частот ω_n.

Предположим теперь, что в некотором шнуре установилась стоячая волна с некоторой длиной волной λ (частотой $\omega = 2\pi v/\lambda$) и амплитудой в пучности, равной 2a. Если считать, что один из закреплённых концов шнура имеет координату $z = 0$, то такая стоячая волна, очевидно, описывается уравнением:

$$S = 2a \sin kz \cdot \cos \omega t, \;\; k = {}^{2\pi}/_{\lambda}.$$

Теперь представим себе, что мы перерезали струну в некоторой точке $z = -\ell$, а освободившийся конец приводим в движение внешней силой так, чтобы он совершал точно такие же гармонические колебания, какие он совершал в стоячей волне до перерезания струны:



$$S_p(t) = 2a \sin(-k\ell) \cdot \cos \omega t\,, \;\; k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}, \tag{2}$$

где v – скорость распространения волн в шнуре.

Ясно, что движение всех точек струны справа от этой точки при этом никак не изменится. Таким образом, стоячую волну в ограниченной струне длиной ℓ с закреплённым правым концом можно рассматривать как установившееся вынужденное колебание при синусоидальном внешнем воздействии частотой ω на её левый конец P. Причём связь характеристик стоячей волны с законом движения $S_p(t)$ точки P дается формулой (2). Эту формулу можно понимать, как формулу для нахождения амплитуды $(2a)$ колебаний в пучности стоячей волны по известной амплитуде вынужденных колебаний левого конца струны P. Если записать $S_p(t)$ в виде

$$S_p(t) = -b \cos \omega t,$$

то, очевидно, получим:

$$2a = \frac{b}{\sin \frac{\omega}{v} \ell}.$$

Из последней формулы видно, что амплитуда в пучности стоячей волны будет огромной (в отсутствие затухания – бесконечной) даже при очень малой амплитуде b колебаний левого конца, если $\sin \frac{\omega}{v} \ell = 0$, т.е. когда частота ω совпадает с одной из собственных частот шнура $\omega_n = \pi v n/\ell$ $(\omega_n \ell/v = \pi n)$ (при этом на левый конец струны P приходится узел стоячей волны). Поэтому указанное сильное возбуждение колебаний есть не что иное, как явление резонанса.

Все сказанное о стоячих волнах в шнуре относится и к другим распределённым системам, таким как стержни или длинные электрические цепи с переменным током такой высокой частоты, что его уже нельзя считать квазистационарным.

Излучение электромагнитных волн

Как уже говорилось, основным следствием гипотезы Максвелла о токе смещения, является утверждение о возможности существования электромагнитных волн, способных распространяться даже в вакууме. Причем для их возникновения достаточно, чтобы некоторое время в некоторой области пространства существовало изменяющееся во времени магнитное поле (это возможно, например, при изменении силы тока в проводнике, т.е. при изменении скорости движения электрических зарядов). При этом, как следует из закона электромагнитной индукции, чем быстрее меняется со временем магнитная индукция, тем больше напряженность возникающего вихревого электрического поля:

$$\vec{E} \sim \frac{d\vec{B}}{dt}, \ \ \vec{B} \sim \vec{j}, \ \ \vec{j} \sim \vec{v} \ \Rightarrow \ \vec{E} \sim \frac{d\vec{v}}{dt} \sim \vec{a},$$

т.е. ***электромагнитные волны возникают при ускоренном движении электрических зарядов. Причём, величина электрического поля, и, следовательно, величина жёстко связанного с ним магнитного поля в бегущей электромагнитной волне пропорциональны ускорению излучающих эту волну заряженных частиц***.

В частности, если заряженные частицы совершают колебания с частотой ω и амплитудой смещения X_0, то интенсивность I излучаемых ими волн будет пропорциональна четвёртой степени частоты колебаний:

$$I \sim E^2, \ \ E \sim a, \ \ a \sim \omega^2 X_0.$$

Поэтому для излучения мощных электромагнитных волн необходимо создать электромагнитные колебания достаточно высокой частоты. Казалось бы, такие колебания вполне легко можно получить с помощью обычного колебательного контура, частота колебаний в котором $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ тем больше, чем меньше индуктивность L и ёмкость C_0 контура.

Однако впервые излучение электромагнитных волн было экспериментально осуществлено и зарегистрировано лишь 1888-м году, т.е. спустя почти 10 лет после смерти Максвелла. Это связано с тем, что, как оказалось, большая частота электромагнитных колебаний в контуре ещё не гарантирует интенсивного излучения электромагнитных волн. В частности, обычный LC – контур (его можно назвать закрытым), представляющий собой почти замкнутую электрическую цепь, в которой сила тока в данный момент времени практически одинакова во всех участках цепи, очень слабо излучает электромагнитные волны. Дело в том, что электромагнитная волна, излучаемая колебательным контуром в целом, есть не что иное, как результат интерференции волн, излучаемых его отдельными небольшими участками. В каждой точке пространства колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в этих волнах имеют естественно одинаковую частоту, совпадающую с частотой колебаний в контуре, но различную фазу, амплитуду и направление (поляризацию).

Различия в фазе и амплитуде связаны как с существованием разности хода у волн, излученных разными участками контура (т.е. с разностью расстояний от точки наблюдения до этих участков), так и со сдвигом фаз между колебаниями тока в этих участках. Нетрудно понять, что оба эти сдвига фаз по порядку величины равны $\omega\ell/v$, где ℓ – размер контура, ω – частота колебаний в нём, а v – скорость распространения электромагнитных волн (в вакууме $v = c$), и для обычного колебательного контура много меньше π.

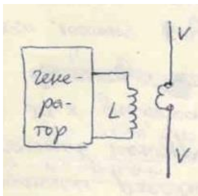
Различия в направлении колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в волнах, излучаемых различными участками контура, обусловлены различной ориентацией этих участков по отношению к точке наблюдения. Для замкнутой электрической цепи различие в ориентации её частей, очевидно, весьма существенно, что и приводит к сильному взаимному ослаблению волн, испускаемых различными частями замкнутой цепи. Именно этим и объясняется слабая излучательная способность закрытого колебательного контура. Её можно повысить, если добиться, чтобы во всех элементах цепи ток имел одинаковое направление. Правда это будет достаточно необычный контур с незамкнутым (!) током. Впервые такой колебательный контур был реализован Герцем в его опытах, которые он провёл в 1887 – 88 годах.

Опыты Герца. Открытый колебательный контур

Для получения электромагнитных волн Герц использовал простое устройство, называемое сейчас ***вибратором Герца***. Он представляет собой ***открытый колебательный контур***. К открытому контуру можно перейти от закрытого, если постепенно раздвигать пластины конденсатора, уменьшая их площадь, и одновременно уменьшать число витков в катушке. В конце концов, получится просто прямой провод. Это и есть открытый колебательный контур. В отличие от обычного LC – контура, который состоит из двух частей с ярко выраженными индуктивными и емкостными свойствами, открытый колебательный контур представляет собой распределённую колебательную систему. Каждая его часть обладает одновременно и ёмкостью и индуктивностью. Учитывая электромеханическую аналогию нетрудно понять, что такой контур во многом аналогичен натянутой струне. И, следовательно, наиболее легко в нём должны возбуждаться стоячие волны, частоты которых близки к его собственным частотам.

Для возбуждения колебаний в таком контуре во времена Герца поступали так. Провод разрезали посередине и между его частями делали небольшой зазор, называемый искровым промежутком. Обе части проводника заряжали до высокой разности потенциалов. Когда разность потенциалов превышала некоторое предельное значение, проскакивала искра (происходил пробой воздуха в воздушном промежутке), цепь замыкалась (в воздухе происходила ионизация и появлялись носители зарядов), и в открытом контуре возникали колебания высокой частоты с узлами тока и пучностями зарядов на его концах. Наиболее интенсивным при этом оказывается основное собственное колебание с пучностью тока посередине вибратора и с длиной волны, равной удвоенному расстоянию между его концами (при этом плотность тока во всех точках проводника направлена в одну сторону).

Для обнаружения электромагнитных волн Герц пользовался резонаторами различной формы. Наиболее простым и удобным является прямой открытый резонатор. По форме и размерам он должен быть тождественен с излучающим вибратором, чтобы совпадали их собственные частоты. Когда электромагнитная волна достигает резонатора, в нём возбуждаются вынужденные высокочастотные электрические токи. Они наиболее интенсивны при совпадении собственных частот вибратора и резонатора (т.е. при резонансе). О появлении таких токов Герц судил по проскакиванию слабой электрической искорки в малом зазоре в середине резонатора или по свечению миниатюрной газоразрядной трубки, включённой между половинами резонатора. В настоящее время для получения незатухающих колебаний в открытом колебательном контуре его связывают индуктивно с колебательным контуром лампового генератора, соединяя, например, половинки вибратора (VV) одним или несколькими витками медной проволоки, индуктивно связанными с катушкой индуктивности *L* генератора.



Однако, само по себе наблюдения высокочастотных токов в резонаторе, помещенном вблизи вибратора Герца, ещё не доказывает существование электромагнитных волн. Решающим доводом в пользу волновой природы наблюдавшихся Герцем электромагнитных эффектов, стала обнаруженная им интерференция электромагнитных волн.

Вскоре после опытов Герца стало ясно, что свойства открытых им электромагнитных волн на самом деле изучаются на протяжении нескольких тысячелетий. Дело в том, что опыты Герца, подтвердив реальность предсказанных Максвеллом электромагнитных волн, способствовали быстрому признанию справедливости и другого предположения Максвелла о том, что свет – это частный случай электромагнитных волн, отличающийся от других электромагнитных волн только частотой и, следовательно, длиной волны.