

Куб в космосе

Известно, что все крупные тела солнечной системы имеют форму, близкую к шару. В то же время встречаются астероиды, форма которых весьма далека от шарообразной. Понятно, что форма космических тел, не вращающихся с большой угловой скоростью, определяется действием сил гравитации и сил, возникающих при деформации материала, из которого состоит космическое тело. Если материал не сопротивляется при деформациях сдвига, то есть является жидкостью или газом, то сферическая форма такого тела объясняется, исходя из энергетических соображений. Этой форме соответствует минимальная потенциальная энергия, обусловленная гравитационным взаимодействием. Чтобы не рассуждать о всевозможных формах, которые могут иметь твердые тела в космосе, давайте поставим перед собой конкретный вопрос:

Каким может быть максимальный размер планеты в форме куба?

Такое космическое тело (планета) должно длительное время сохранять свою форму. Предполагается, что весь объем куба заполнен веществом. В качестве материала можно выбрать любой материал, для которого известны его механические характеристики. Если с силами гравитации и с законом Всемирного тяготения Ньютона мы хорошо знакомы, то о силах, которые обеспечивают твердым телам сохранение их формы, в школьных учебниках написано не только мало, но и (в большинстве из них) неправильно. Существование конденсированных тел объясняется притяжением между молекулами, удаленными на расстояния, превышающие собственные размеры молекул и отталкиванию молекул, являющихся непосредственными соседями – «касающихся» друг друга. Это притяжение в терминах энергии соответствует тому, что суммарная энергия молекул конденсированного тела, включающая кинетическую энергию и потенциальную энергию взаимодействия молекул, оказывается отрицательной величиной. В терминах сил это притяжение удаленных молекул соответствует большому внутреннему давлению, сжимающему конденсированное тело. Дальнейшее сжатие конденсированного тела останавливается вследствие отталкивания молекул соседок друг от друга. Если к большому (сжимающему конденсированное вещество) внутреннему давлению прибавить небольшое внешнее давление (сжимающее или растягивающее), то конденсированное тело все равно останется сильно сжатым. Оно, правда, изменяет свою форму (деформируется), при этом тело приобретает положительную дополнительную потенциальную энергию, распределенную по объему и связанную с деформациями. Суммарная внутренняя энергия тела все равно остается отрицательной.

Внешние усилия могут приводить к заметному изменению формы твердого тела – к необратимым деформациям. Эти необратимые деформации и ограничивают максимальные размеры планеты в форме куба. До того, как начинаются необратимые деформации, тело деформируется обратимым образом. То есть при снятии приложенных усилий оно вновь принимает свою прежнюю форму. Деформации тел характеризуются безразмерной величиной «относительной деформацией»: $\frac{\Delta L}{L}$. Здесь L – это линейный размер тела, а ΔL – это изменение соответствующего размера. Максимальные величины обратимых относительных деформаций для таких материалов, как кирпич, железо, золото, лед, пенопласт, гранит значительно меньше единицы.

Космическое строительство

Давайте проведем мысленный эксперимент по «строительству» в космосе кубической планеты из жесткого материала, у которого максимальные величины относительных обратимых деформаций значительно меньше единицы. Введем в рассмотрение такое понятие, как форма планеты при отсутствии гравитационных сил. Имеется ввиду, что при наличии гравитационных сил планета имеет форму куба, а если «выключить» гравитацию, то какую-то другую форму. Понятно, что для таких материалов, как гранит, железо и пр. эта другая форма будет очень мало отличаться от куба.

Деформации и устойчивость формы

В нашем случае весь материал кубической планеты сжимается под действием сил гравитации. Изотропно материал сжимается только в центре куба. Сжатие материала в остальных частях куба не является изотропным. Эти слова – не изотропное сжатие – являются ключевыми для данной задачи.

Известно, что при сжатии стержня внешними силами в продольном направлении, его поперечные размеры увеличиваются. При некоторой величине сжимающих усилий стержень теряет устойчивость своей формы, и «сам изгибается в сторону» или ломается. Проще всего заметить одновременные изменения размеров в различных направлениях и потерю устойчивости формы, если сжать пальцами или в тисках резиновый ластик, который имеется в портфеле почти у каждого школьника. Если сжимать в тисках карандаш в продольном направлении, то при некотором внешнем усилии он сломается, потеряв устойчивость формы.

Прделаем еще один мысленный эксперимент. Будем сжимать кирпич (или гранитный камень) изотропно, поместив его в сосуд с жидкостью. Какое бы большое давление мы ни

создали, камень останется камнем и не разрушится. Если же сжимать его не изотропно, а, например, в тисках, то при достижении определенного предела кирпич и камень начинают крошиться и трескаться, увеличивая свой размер в направлении, поперечном направлению сжатия. Для кирпичей и бетона в строительстве применяют характеристику прочности – «марка» кирпича или «марка» бетона. Для определения марки строительного материала его подвергают как раз неизотропному сжатию (сжимают вдоль одного направления). Если материал выдерживает неизотропное давление 100 Атм, то его марка 100. Резина сохраняет свою «целостность» при значительных деформациях. Чтобы, например, разорвать ластик, растягивая его, нужно, чтобы размеры ластика заметно увеличились. В зависимости от сорта резины необходимое относительное удлинение может составить 100% и более. Если для изготовления кубической планеты в качестве материала используется достаточно мягкая резина, то, по-видимому, никакого разрушения материала не произойдет. Но при достижении определенного размера резиновая кубическая планета потеряет устойчивость формы.

Планета из кирпича марки 100

Для жесткого и хрупкого материала, имеющего некоторую плотность и соответствующие прочностные характеристики, при достижении планетой определенного размера в некоторых местах в материале планеты возникнут настолько большие напряжения, что будет превзойден предел прочности этого материала. Начнется разрушение, которое приведёт к изменению формы планеты. Форма начнет приближаться (хотя бы чуть-чуть) к сферической. Наша задача: указать эти самые «некоторые» места на планете, в которых начнется разрушение, и оценить максимальный размер (ребро куба) планеты. Очевидно, что в центре куба сжатие изотропно, поэтому там материал никогда не будет разрушаться. Очевидно также, что вблизи вершин куба дополнительное давление, обусловленное гравитацией, близко к нулю. А вот вблизи от центров граней куба на поверхности этих граней материал оказывается сдавленным за счет гравитации и это сжатие неизотропно, поскольку в направлении перпендикулярном грани куба никакого сжатия нет. Сжимаемому материалу «есть куда» увеличивать свой размер при разрушении. Материал на поверхности планеты вблизи центра грани сжат в двух взаимно перпендикулярных направлениях вдоль плоскости грани. Если считать, что полностью изотропному сжатию соответствует «неизотропность» = 0, а материалу, сжимаемому только в одном направлении, соответствует «неизотропность» = 1, то в нашем случае «неизотропность» должна находиться внутри этого диапазона 0 – 1. Примем ее равной 0,5. Отсюда можно сделать предположение, что при достижении вблизи центров граней куба

давления 200 Атм по мере роста размеров кирпичной планеты начнется разрушение кирпича. Это и будет оценкой максимального размера кубической кирпичной планеты.

Оценка давления

Как найти давление в каком-либо месте внутри кубической планеты? Закон Всемирного тяготения позволяет сделать это точно. Недаром с помощью вычислений на основе этого закона были открыты ранее неизвестные планеты Солнечной системы.

Однако нам нужно только оценить величину давления, поэтому выбором достаточно простой модели можно обойти значительные трудности при вычислениях.

Представим себе, что грани куба представляют собой жесткие, но невесомые стенки, которые удерживают внутри несжимаемую жидкость. Плотность жидкости ρ равна плотности материала нашей планеты. Гравитационное поле вблизи поверхности куба заменим полем, которое создает шар с таким же объемом, как и куб.

$$g = G\rho A(4\pi/3)^{2/3}$$

$$g = G\rho A(4\pi/3)^{2/3}$$

G – гравитационная постоянная, A – длина ребра куба. При этом отличие модельного поля от точного внесет в нашу оценку ошибку. Отличие полученного результата от точного не превысит, как мне думается, десятка процентов. (Кстати в большинстве школ имеются компьютеры и можно найти отличие точно, составив несложную программу вычислений.)

Будем для упрощения модели считать, что гравитационное поле на расстояниях от $A/2$ до $A3^{1/2}/2$ примерно одинаковое. Тогда оценка разницы давлений в этих точках будет такой:

$$\Delta P = \rho gh = G\rho^2 A^2 (4\pi/3)^{2/3} (3^{1/2} - 1)/2 = 0,95 G\rho^2 A^2 \approx G\rho^2 A^2.$$

Размеры планет

Плотность обыкновенного кирпича около 1500 кг/м^3 . Приравниваем полученную в качестве оценки величину разности давлений предельному давлению, которое выдерживает материал при неизотропном сжатии.

$$\Delta P = 200 \text{ Атм},$$

и находим длину ребра куба:

$$A \approx (\Delta P/G)^{1/2}/\rho \approx 360 \text{ км}.$$

Для оценки размеров кубических планет, построенных из других хрупких материалов, нужно, оказывается, знать про соответствующий материал только две величины ΔP и ρ . Например, плотность сплошного гранита примерно 2500 кг/м^3 , а прочность гранита достигает величины 2000 Атм. Значит, гранитная планета может иметь максимальный размер ребра куба примерно 1250 км.

Задания:

1. Оцените самостоятельно максимальные размеры кубических планет из стали, золота, льда, пенопласта. Какая планета получилась самой большой?
2. Оцените максимальные размеры планет в форме сплошного цилиндра с соотношением длина/диаметр = 10 и 1000. Насколько отличаются диаметры таких цилиндров?
3. Попробуйте найти изменение формы резиновой кубической планеты максимального размера, если «выключить» гравитационное поле.

С.Варламов.