

**1. Тонны песка (4 баллов)**

В пустой контейнер засыпают песок с помощью двух конвейерных лент. Длина каждой ленты составляет  $L = 30$  м. Первая лента движется со скоростью  $v_1 = 3$  м/с, с неё в контейнер каждую секунду сыпается  $m_1 = 20$  кг песка. Вторая лента движется со скоростью  $v_2 = 2$  м/с, с неё в контейнер каждую секунду поступает  $m_2 = 10$  кг песка. Ленты включают одновременно, в начальный момент они пусты. Песок начинают подавать на ленты на расстоянии  $L$  от контейнера сразу после их включения.

- За какое наименьшее время после включения лент в контейнер будет загружено  $M = 4$  т песка?
- Сколько килограммов песка поступит в контейнер с каждой ленты к моменту окончания загрузки?

**2. Радиус Шварцшильда (5 баллов)**

При решении задачи могут понадобиться следующие справочные данные: гравитационная постоянная  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ ; скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; радиус Земли  $R_3 = 6,4 \cdot 10^6$  м; ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g = G \frac{M_3}{R_3^2} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$  (здесь  $M_3$  — масса Земли). Приведённые обозначения физических констант остаются неизменными на протяжении всей задачи.

Согласно общей теории относительности, если сжать сферическое тело равномерной плотности до радиуса, меньшего некоторого критического значения  $R_g$ , то гравитация на его поверхности станет настолько сильной, что даже свет не сможет покинуть это тело — оно превратится в чёрную дыру. Этот критический радиус, называемый гравитационным, или радиусом Шварцшильда, вычисляется по формуле:

$$R_g = 2 \cdot m^\alpha \cdot G^\beta \cdot c^\gamma,$$

где  $m$  — масса тела,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — некоторые безразмерные постоянные. Никакие другие характеристики тела (плотность, химический состав и т.п.) на значение  $R_g$  не влияют.

- Пользуясь соображениями размерности, определите значения постоянных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .
- До какого радиуса необходимо сжать Землю, согласно приведённой теории, чтобы она превратилась в чёрную дыру?

**3. Система с поджатыми пружинами (8 баллов)**

В системе, изображённой на рисунке 1, невесомая и нерастяжимая нить перекинута через два подвижных невесомых блока. Её правый конец прикреплен к неподвижной горизонтальной стенке, а левый конец — к поджатой пружине жёсткостью  $k_1 = k$ . Ось правого блока прикреплена к поджатой пружине жёсткостью  $k_2 = 4k$ . Пороговые значения сил поджатия обеих пружин одинаковы и равны  $F_0$ . Верхние концы пружин жёстко закреплены. В начальный момент времени левый блок начинают равномерно опускать, так что его ось движется с постоянной скоростью  $v$ . Известно, что величина силы, прикладываемой к оси блока, в начальный момент равна  $F_0$ . Считайте, что нить не проскальзывает по блокам, трение в осях блоков отсутствует.

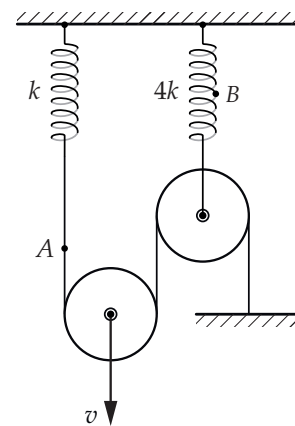


Рис. 1

- Определите скорости точки  $A$  нити и точки  $B$  (середины правой пружины) через время  $t$  после начала движения.
- Найдите зависимость от времени силы  $F$ , которую необходимо прикладывать к оси левого блока, чтобы он двигался вниз с постоянной скоростью  $v$ .

*Примечание.* Обе поджатые пружины устроены так: они не деформируются, пока приложенная к ним сила не превысит пороговое значение  $F_0$ . Как только сила становится больше  $F_0$ , пружина начинает растягиваться (или сжиматься), причём её жёсткость  $k_i$  определяет связь между изменением силы упругости и деформацией:

$$k_i = \frac{F - F_0}{x_i}, \quad i = 1, 2,$$

где  $x_i$  — абсолютная величина деформации (изменение длины) пружины.

**Продолжение задания см. на листе 2**

**4. Определение плотности (6 баллов)**

В лаборатории имеется ареометр, который позволяет измерять плотность только в диапазоне от  $0,90 \text{ г/см}^3$  до  $1,20 \text{ г/см}^3$ . Для определения плотности  $\rho_x$  неизвестной жидкости, которая легче воды, используется метод смешивания. Готовят три смеси с объёмными долями воды:  $0,40$ ,  $0,50$  и  $0,60$  (эти значения известны точно). Измерения дают следующие значения плотности смесей:  $\rho_1 = 0,912 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_2 = 0,926 \text{ г/см}^3$  и  $\rho_3 = 0,938 \text{ г/см}^3$ . Абсолютная погрешность каждого измерения  $\Delta\rho = 0,005 \text{ г/см}^3$ . Плотность воды принята равной  $\rho = 1,000 \text{ г/см}^3$  точно (эталонное значение).

- Для каждой смеси вычислите плотность исходной жидкости  $\rho_x$  и определите абсолютную погрешность каждого полученного значения. Считайте, что объём смеси равен сумме объёмов смешиваемых жидкостей.
- Оцените, в каком интервале может находиться истинное значение  $\rho_x$  по результатам трёх измерений с учётом их погрешностей.
- Если бы у вас была возможность провести только одно измерение, какую объёмную долю воды  $\alpha$  нужно было бы выбрать, чтобы погрешность определения  $\rho_x$  была наименьшей? Учтите, что плотность смеси должна попадать в рабочий диапазон ареометра. Чему равна эта минимальная погрешность? Считайте абсолютную погрешность определения плотности ареометром равной  $\Delta\rho$  для любого значения объёмной доли воды.