



Условия задач, авторские решения и ответы

1. Кинематическое построение (7 баллов)

Е. Кузнецов

Плоский диск вращается вокруг своей оси симметрии, закреплённой вертикально. Точки A и B принадлежат этому диску. На рис. 1 изображены вектор ускорения точки A и вектор скорости точки B . Известно, что вектор ускорения точки B лежит на прямой, показанной на рис. 1 пунктиром.

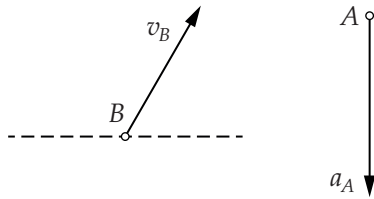


Рис. 1

- С помощью циркуля и линейки постройте вектор скорости точки A и вектор ускорения точки B , кратко обосновав выполненное построение (описывать стандартные построения не требуется). При построении соблюдайте пропорциональность: длины отрезков, изображающих векторы (например, скорости), должны соотноситься на рисунке так же, как модули соответствующих физических величин.

Решение. Поскольку вектор ускорения точки B не перпендикулярен её скорости, вращение диска является неравномерным. Тангенс угла θ между вектором скорости и полным ускорением любой точки диска равен отношению нормальной (a_n) и тангенциальной (a_τ) составляющих ускорения:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\omega^2 R}{\varepsilon R} = \frac{\omega^2}{\varepsilon},$$

где ω — угловая скорость, а ε — угловое ускорение. Поскольку угловые характеристики ω и ε одинаковы для всех точек твёрдого тела, угол θ между вектором скорости и вектором ускорения также сохраняет своё значение для любой точки диска. Отметим также, что модуль скорости и ускорения любой точки диска пропорциональны расстоянию до оси вращения: $v = \omega R$, $a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$. На этих фактах основывается дальнейшее построение.

Для построения вектора \vec{v}_A проведём через точку A прямую a , образующую с вектором \vec{a}_A угол θ , равный углу между вектором \vec{v}_B и вектором \vec{a}_B (лежащим на пунктирной линии). При этом угол между \vec{a}_A и прямой a должен отсчитываться в том же направлении, что и угол между \vec{a}_B и вектором \vec{v}_B . Прямая a может быть проведена единственным образом (см. рис. 2). Построение угла, равного данному, является стандартным геометрическим построением.

Вектор \vec{v}_A лежит на прямой a . Однако возможны два варианта: угол θ может быть острым или тупым. Чтобы

сделать выбор, построим центр вращения O : из точки B проведём перпендикуляр p_B к вектору \vec{v}_B , а из точки A — перпендикуляр p_A к прямой a . Точка O , являющаяся пересечением p_A и p_B , и есть центр вращения (рис. 2). Проанализировав взаимное расположение векторов \vec{v}_A , \vec{v}_B и соответствующих радиус-векторов, проведённых из точки O , приходим к выводу, что угол θ острый. Если предположить обратное, то возникнет противоречие: направления вращения точек A и B вокруг центра O окажутся противоположными.

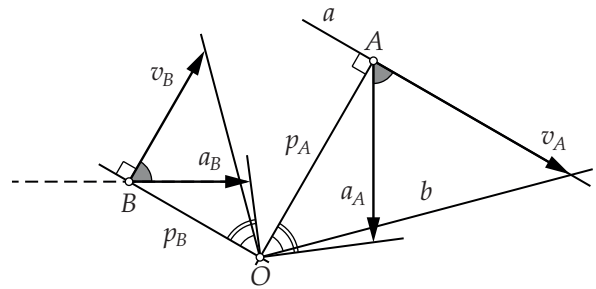


Рис. 2

Теперь, когда мы знаем направление скорости точки A и ускорения точки B обсудим, как построить сами эти векторы с соблюдением пропорций. Используем тот факт, что модуль скорости пропорционален расстоянию до оси вращения. Обозначим через β угол, под которым вектор скорости точки B виден из точки O . Проведём через точку O прямую b под углом β к OA . Конец вектора скорости точки A лежит в точке пересечения прямых a и b (рис. 2). Доказательство следует из подобия треугольников. Аналогичным образом строится вектор ускорения точки B .
Ответ: см. рис. 2, обоснование в решении.

2. Оптическое построение (10 баллов)

Г. Расторгуев

На рис. 3 изображены три точки O , S_1 и S_2 , лежащие на одной прямой. Точка O является оптическим центром идеальной собирающей линзы, а точки S_1 и S_2 — источником и его изображением в этой линзе. Идеальной называется тонкая линза, в которой любые лучи, в том числе идущие под большими углами к оптической оси, преломляются как параксиальные (приосевые).



Рис. 3

- С помощью циркуля и линейки определите положение ближайшего к S_1 фокуса линзы в случае, когда прямая OS_1S_2 является её главной оптической осью.
- Постройте геометрическое место точек (ГМТ), в которых может располагаться один из фокусов этой линзы, если положение её главной оптической оси в плоскости рисунка произвольно.

Кратко обоснуйте выполненные построения (стандартные построения обоснования не требуют).

Решение. Построить фокус в случае, когда точки S_1 и S_2 лежат на главной оптической оси, довольно просто. Воспользуемся тем фактом, что луч, параллельный главной оптической оси, после преломления в линзе проходит через фокус.

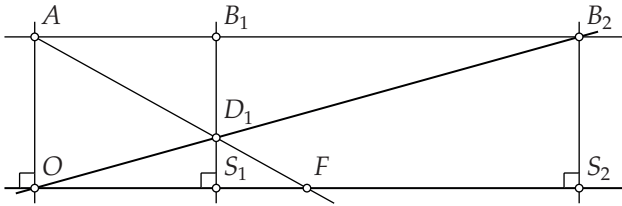


Рис. 4

Построим перпендикуляры к прямой OS_1S_2 в точках O , S_1 и S_2 (см. рис. 4). Отметим на перпендикуляре в точке O произвольную точку A ; отрезок OA лежит в плоскости линзы. Отложим на перпендикулярах, проходящих через S_1 и S_2 , отрезки S_1B_1 и S_2B_2 , равные OA . Прямая AB_1B_2 по построению параллельна главной оптической оси.

Проведём побочную оптическую ось OB_2 . На её пересечении с прямой S_1B_1 получим точку D_1 . В силу подобия треугольников отрезок S_2B_2 (высотой OA) является изображением предмета S_1D_1 в линзе. Точка F на пересечении прямых AD_1 и OS_1 и есть искомым фокус линзы, поскольку луч, падающий на линзу по линии AD_1 (проходящей через F), после преломления в точке A пойдёт параллельно главной оптической оси.

Рассмотрим второй пункт задачи. Пусть главная оптическая ось линзы составляет угол φ с прямой S_1S_2 . Обозначим $a = OS_1$, $a' = OS_2$ и номинальное фокусное расстояние $f = OF$. При наклоне линзы расстояния от точек S_1 и S_2 до плоскости линзы (вдоль новой оптической оси) становятся равными $d = a \cos \varphi$ и $d' = a' \cos \varphi$ соответственно. Фокусное расстояние вдоль наклонной оси f_φ удовлетворяет формуле линзы:

$$\frac{1}{a \cos \varphi} + \frac{1}{a' \cos \varphi} = \frac{1}{f_\varphi}.$$

Из формулы для первого случая ($\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$) следует, что $f_\varphi = f \cos \varphi$ (см. рис. 5).

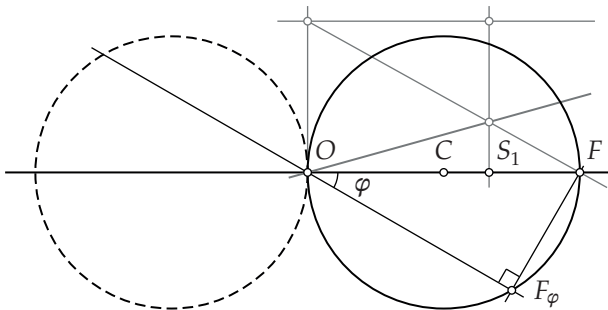


Рис. 5

Если F_φ — точка фокуса на наклонной оси, то из соотношения $OF_\varphi = OF \cos \varphi$ вытекает, что треугольник $OF_\varphi F$ является прямоугольным ($\angle OF_\varphi F = 90^\circ$). Таким образом, точка F_φ всегда является проекцией точки F на текущую оптическую ось. Искомым ГМТ является окружность, построенная на отрезке OF как на диаметре. Центр этой окружности C находится в середине отрезка OF , а радиус

равен $\frac{f}{2}$. ГМТ второго фокуса линзы тоже является окружностью. Эта окружность (показанная пунктиром на рис. 5) располагается симметрично окружности с центром в точке C относительно точки O .

Поскольку точка F уже найдена в первом пункте, построение сводится к нахождению середины C отрезка OF и проведению окружности радиусом CF .

Ответ: Искомое ГМТ — окружность радиусом $\frac{f}{2}$, где f — фокусное расстояние, определяемое в первом пункте.

3. С общим эмиттером (12 баллов)

П. Крюков

Биполярный *npn*-транзистор — полупроводниковый прибор с тремя выводами: *эмиттером*, *коллектором* и *базой*. Эти выводы обозначены соответствующими буквами на схеме, приведённой на рис. 6, где показана схема упрощённого усилительного каскада на транзисторе. Эта схема предназначена для увеличения *амплитуды* сигнала, то есть переменной составляющей входного напряжения. Если на вход подаётся напряжение вида

$$U_{\text{вх}}(t) = U_0 + U_1 \sin(\omega t),$$

где U_0 (напряжение смещения базы) и ω (круговая частота) — постоянные величины, а U_1 — амплитуда сигнала, то напряжение на высокоомной нагрузке R_H , подключённой к выходу (между эмиттером и коллектором), также содержит постоянную и переменную составляющие. При этом выходной сигнал имеет практически синусоидальную форму (искажения обычно не превышают нескольких процентов), а его амплитуда U_2 в несколько раз превышает амплитуду входного сигнала U_1 .

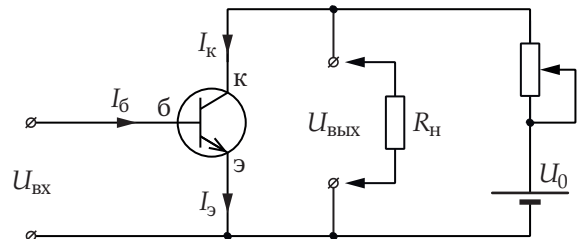


Рис. 6

Основной характеристикой усилительного каскада является коэффициент усиления по напряжению — модуль отношения амплитуд выходного и входного сигналов:

$$K_U = \left| \frac{U_2}{U_1} \right|.$$

Пусть напряжение смещения базы и амплитуда входного сигнала равны соответственно $U_0 = 0,7$ В и $U_1 = = 0,2$ мВ.

Входная характеристика транзистора, то есть зависимость тока базы $I_б$ от напряжения между базой и эмиттером $U_{бэ}$, задаётся соотношением

$$I_б = I_{б0} \cdot 10^{\left(\frac{U_{бэ}}{U_T} - 12\right)}.$$

Здесь $U_T = 0,06$ В, $I_{б0} = 5$ мкА. Для наглядности на рис. 7 приведён график этой зависимости для напряжений, близких к напряжению смещения базы.

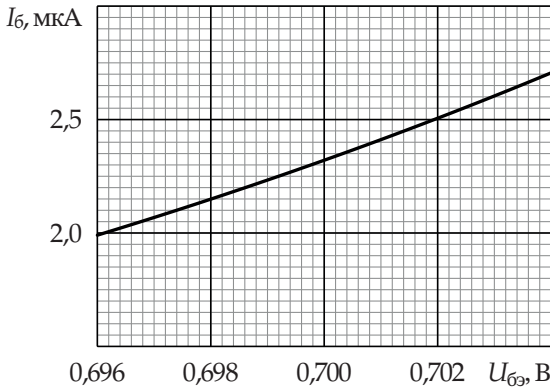


Рис. 7

Зависимость тока коллектора I_k от напряжения между коллектором и эмиттером $U_{кэ}$ в рассматриваемой области токов и напряжений параметрически зависит от тока базы $I_б$ и описывается формулой

$$I_k = 200 \cdot I_б \left(1 + \frac{U_{кэ}}{U_A} \right),$$

где $U_A = 100$ В. Сопротивление реостата R в схеме на рис. 6 может изменяться от 1 кОм до 10 кОм, напряжение идеального источника $U_0 = 9$ В. Ток через нагрузку R_n пренебрежимо мал по сравнению с током коллектора.

- Определите для крайних значений сопротивления реостата ток коллектора $I_{к0}$ в отсутствие входного переменного сигнала ($U_1 = 0$).
- Коэффициент усиления по току $K_I = I_k/I_б$ при заданных параметрах слабо зависит от тока базы. Определите K_I с точностью не хуже 1,0% при $R = 5$ кОм.
- Какие значения может принимать коэффициент усиления по напряжению K_U ? Укажите границы возможного диапазона с точностью не хуже 2,0%. В рамках данной модели такая точность достижима даже с учётом малых искажений выходного сигнала.

Примечание. Возможно (но не обязательно), при решении вам понадобится формула для производной функции $f(x) = 10^x$ в точке $x = x_0$:

$$(10^x)' \Big|_{x=x_0} = \ln 10 \cdot 10^{x_0} \approx 2,302585 \cdot 10^{x_0}.$$

Решение. Поскольку ток через нагрузку пренебрежимо мал, напряжение на выходе равно

$$U_{\text{вых}} = U_{кэ} = U_0 - I_k R.$$

Подставляя это выражение в формулу для тока коллектора и выполняя преобразования, получаем

$$I_k = I_б \cdot \frac{200 \left(1 + \frac{U_0}{U_A} \right)}{1 + \frac{200 I_б R}{U_A}}. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует выражение для коэффициента усиления по току, в котором ток базы является параметром:

$$K_I = \frac{200 \cdot \left(1 + \frac{U_0}{U_A} \right)}{1 + \frac{200 I_б R}{U_A}}. \quad (2)$$

Найдём ток базы при нулевом входном сигнале (сигналом, напомним, мы называем переменную составляющую входного напряжения). Из формулы, приведённой в

условии, имеем

$$I_б(0) = I_{б0} \cdot 10^{\left(\frac{U_б}{U_T} - 12 \right)} \approx 2,32079 \text{ мкА}.$$

Подставляя найденное значение $I_б(0)$ в формулу (1), определяем искомые значения тока коллектора:

$$I_k(0) \Big|_{1 \text{ кОм}} \approx I_б(0) \cdot \frac{218}{1 + \frac{200 \cdot 2,3208 \cdot 10^{-3}}{100}} \approx 503,6 \text{ мкА},$$

$$I_k(0) \Big|_{10 \text{ кОм}} \approx I_б(0) \cdot \frac{218}{1 + \frac{200 \cdot 2,3208 \cdot 10^{-2}}{100}} \approx 483,5 \text{ мкА}.$$

Теперь определим пределы изменения тока базы при колебаниях входного напряжения. При максимальном отклонении входного напряжения от напряжения смещения базы (при $U_{бэ} = U_б \pm U_1$)

$$I_б(+U_1) = I_{б0} \cdot 10^{\left(\frac{U_б+U_1}{U_T} - 12 \right)} \approx 2,33868 \text{ мкА},$$

$$I_б(-U_1) = I_{б0} \cdot 10^{\left(\frac{U_б-U_1}{U_T} - 12 \right)} \approx 2,30305 \text{ мкА}.$$

Отклонение тока базы от значения $I_б(0)$ не превышает 1,0%. Поэтому при вычислении коэффициента усиления по току по формуле (2) можно принять $I_б = I_б(0) = 2,3208$ мкА. Тогда при $R = 5$ кОм получаем

$$K_I = \frac{218}{1 + \frac{200 \cdot 2,3208 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{100}} \approx 213,1.$$

Для других значений сопротивления реостата погрешность, обусловленная колебаниями тока базы около значения 2,3208 мкА, также не превышает 1,0%. Для 1 кОм и 10 кОм коэффициенты усиления по току равны соответственно

$$K_I \Big|_{1 \text{ кОм}} \approx 217,0 \quad K_I \Big|_{10 \text{ кОм}} \approx 208,3.$$

Эти значения далее можно использовать при вычислении коэффициента усиления по напряжению, учитывая что погрешность их определения составляет около 1,0%.

Коэффициент усиления по напряжению можно определить двумя способами. Предположим, что выходной сигнал близок к синусоидальному. Вычислим напряжение на выходе в точках наибольшего отклонения; модуль разности этих значений равен удвоенной амплитуде сигнала. Ток коллектора удобно находить через коэффициент усиления по току. Тогда

$$K_U = \frac{K_I R}{2U_1} |I_б(+U_1) - I_б(-U_1)|. \quad (3)$$

Поскольку ток базы определяется точно по формуле из условия, погрешность вычисления коэффициента усиления по напряжению связана главным образом с отклонением формы сигнала от синусоидальной и с погрешностью определения K_I , оцениваемой в 1%. Подставляя найденные значения тока базы в крайних точках, получаем

$$K_U \Big|_{1 \text{ кОм}} \approx 19,3 \quad K_U \Big|_{10 \text{ кОм}} \approx 185,5.$$

Оценим погрешность, обусловленную искажением сигнала. Ток базы в крайних точках отклоняется от значения

при нулевом сигнале несимметрично:

$$\Delta I_+ = I_6(+U_1) - I_6(0) = 0,001789 \text{ мкА},$$

$$\Delta I_- = I_6(0) - I_6(-U_1) = 0,001774 \text{ мкА}.$$

Следовательно, колебания тока базы можно считать синусоидальными лишь в первом приближении. Погрешность, обусловленную ангармоничностью колебаний, оценим по формуле

$$\delta(\Delta I) = \frac{\Delta I_+ - \Delta I_-}{\Delta I_+ + \Delta I_-} \approx 0,4\%. \quad (4)$$

Поскольку погрешность определения K_U обусловлена двумя физически независимыми факторами (неточностью вычисления K_I и искажением формы сигнала из-за нелинейности входной характеристики), в качестве оценки сверху для суммарной погрешности можно взять сумму максимальных значений этих погрешностей. Такая грубая (заведомо завышенная) оценка даёт суммарную погрешность 1,4%, что гарантированно укладывается в допуск 2%, заданный в условии.

Второй способ определения K_U основан на линеаризации входной характеристики транзистора вблизи $I_6(0)$. В этом случае ток базы изменяется строго синусоидально, а погрешность линеаризации не превышает значения, найденного в (4).

Для тока базы в крайних точках получаем

$$I_6(\pm U_1) = I_6(0) \left(1 \pm \frac{U_1}{U_T} \ln 10 \right). \quad (5)$$

Коэффициент усиления рассчитывается по формуле (3). Подставляя выражения (5) в (3) и выполняя преобразования, получаем

$$K_U = K_I \ln 10 \cdot \frac{I_6(0)R}{U_T}.$$

При сопротивлениях реостата 1 кОм и 10 кОм численные значения коэффициента усиления совпадают с полученными ранее.

Отметим, что в рамках линеаризованной модели (погрешность которой не превышает 0,4%) зависимость напряжения на выходе от времени имеет вид:

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вых}}^{(0)} - K_I \ln 10 \cdot \frac{I_6(0)R}{U_T} \cdot U_1 \sin(\omega t),$$

где $U_{\text{вых}}^{(0)} = U_0 - K_I I_6(0)R$ — постоянная составляющая напряжения на нагрузке.

Полученное выражение наглядно демонстрирует ключевую особенность схемы с общим эмиттером: знак «минус» перед переменной составляющей указывает на *инверсию фазы* выходного сигнала. Физически это объясняется тем, что при росте входного напряжения транзистор открывается сильнее и ток в цепи коллектора увеличивается. В результате падение напряжения на нагрузочном резисторе R растёт, а потенциал самого коллектора (выходное напряжение) падает. Таким образом, в моменты времени, когда входное напряжение достигает максимума, напряжение на выходе становится минимальным, и наоборот — сигналы колеблются в противофазе.

Обратим внимание на то, что нелинейность выходной характеристики транзистора, проявляющаяся в присутствии в знаменателе формулы (2) для коэффициента

усиления по току слагаемого $\frac{200I_6R}{U_A}$, обусловлена так называемым *эффектом Эрли* — модуляцией ширины базы и, как следствие, зависимостью тока коллектора от напряжения коллектор–эмиттер.

Ответ: $I_K(0)|_{1 \text{ кОм}} \approx 503,6 \text{ мкА}$, $I_K(0)|_{10 \text{ кОм}} \approx 483,5 \text{ мкА}$;
 $K_I|_{5 \text{ кОм}} \approx 213$; $K_U|_{1 \text{ кОм}} \approx 19,3$, $K_U|_{10 \text{ кОм}} \approx 186$.

4. О бусинке и грузе (12 баллов)

П. Крюков

На гладкое проволочное кольцо радиуса R , закреплённое в вертикальной плоскости, насажена маленькая массивная бусинка массой m . К бусинке прикреплён один конец тонкой нерастяжимой невесомой нити (см. рис. 8). Другой её конец пропущен через маленький идеальный блок и прикреплён к грузу массой km , где k — постоянный коэффициент. Блок закреплён в точке, лежащей на горизонтальном диаметре кольца. Положение бусинки на кольце характеризуется углом φ между направлениями на блок и на бусинку из центра кольца.

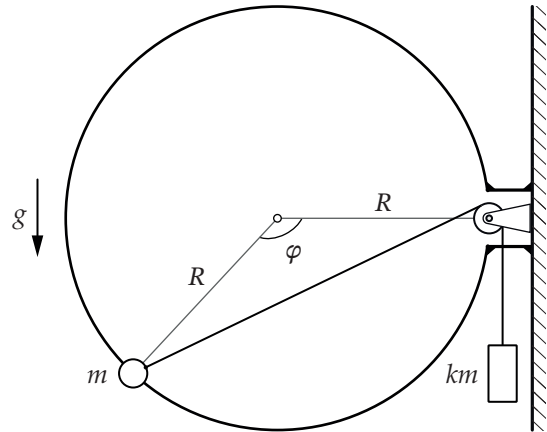


Рис. 8

- Пусть $k = 1/\sqrt{3}$. Определите угол (или углы), соответствующий положению равновесия бусинки. В начальный момент времени бусинке, находящейся в положении *устойчивого* равновесия, сообщают ударом скорость v , направленную вдоль кольца в сторону от блока. При каком минимальном значении скорости $v = v_{\text{min}}$ бусинка сможет достичь блока, двигаясь всё время в одну сторону (по часовой стрелке)?
- При каких значениях параметра k на кольце отсутствуют точки, в которых бусинка могла бы находиться в состоянии *устойчивого* равновесия?
- Пусть теперь между бусинкой и проволокой есть трение, а коэффициент трения зависит от угла как $\mu = \text{tg}(\varphi/2)$. Существует ли для случая равных масс ($k = 1$) положение *устойчивого* равновесия, при котором $\varphi \in (0; \pi/2)$? Найдите это положение (или положения) или докажите, что их не существует.

Размерами крепления кольца, блока, бусинки и груза можно пренебречь. Нить достаточно длинна, так что груз не сталкивается с блоком при движении бусинки. На рис. 8 пропорции изменены для наглядности. Ускорение свободного падения равно g .

Решение. Потенциальная энергия системы, содержащей бусинку и груз в зависимости от угловой координаты φ задаётся формулой

$$W(\varphi) = mgR \left(2k \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \varphi \right). \quad (6)$$

Считается, что ноль потенциальной энергии соответствует нулевому углу φ . При выводе формулы (6) учитывалось условие нерастяжимости нити: $2R \sin \frac{\varphi}{2}$ — длина наклонного участка нити (на такую высоту поднимается груз относительно уровня, соответствующего $\varphi = 0$). Определив экстремумы функции $W(\varphi)$, найдём положения равновесия системы.

Производная функции (6) равна

$$\frac{dW}{d\varphi} = mgR \left(k \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi \right).$$

Обозначим $x = \cos \frac{\varphi}{2}$. Условие равновесия приводит к уравнению

$$2x^2 - kx - 1 = 0.$$

Решая его, получаем корни

$$x = \frac{k \pm \sqrt{8 + k^2}}{4}. \quad (7)$$

При $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ значения $\cos \frac{\varphi}{2}$ в точках экстремума равны

$$\cos \left(\frac{\varphi_1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \left(\frac{\varphi_2}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Им соответствуют физически реализуемые углы

$$\varphi_1 = 60^\circ, \quad \varphi_2 = 2 \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 250,53^\circ.$$

Анализ показывает, что φ_1 соответствует минимуму потенциальной энергии, а φ_2 — максимуму. В точке минимума равновесие бусинки будет устойчивым, а в точке максимума — неустойчивым.

Чтобы бусинка достигла блока, она должна пройти через точку максимума потенциальной энергии. Следует учесть, что в начальный момент скорость приобретают и бусинка, и груз. Скорость груза u связана со скоростью бусинки v соотношением:

$$u = v \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, начальная кинетическая энергия системы равна:

$$T(v) = \frac{mv^2}{2} + \frac{kmu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + k \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \right).$$

Минимальная начальная скорость определяется из условия сохранения энергии:

$$T(v_{\min}) + W(\varphi_1) = W(\varphi_2).$$

Преобразуем выражение для потенциальной энергии для удобства вычислений, выразим тригонометрические функции через $x = \cos \frac{\varphi}{2}$, получится формула

$$W(x) = 2mgR \sqrt{1 - x^2} (k - x).$$

Тогда значения потенциальной энергии в минимуме и

максимуме равны:

$$W(x_1) = -mgR \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad W(x_2) = mgR \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

В итоге для квадрата минимальной скорости имеем выражение

$$v_{\min}^2 = 2gR \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}} \approx 3,03 gR.$$

Минимальная скорость равна

$$v_{\min} \approx 1,74 \sqrt{gR}.$$

Из анализа корней квадратного уравнения (7) следует, что больший корень, определяющий положение устойчивого равновесия, монотонно растёт с увеличением параметра k .

При $k = 1$ этот корень становится равным единице ($x = 1$), что соответствует углу $\varphi = 0$. Меньший корень при этом значении параметра равен:

$$x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 240^\circ.$$

Для любого $k > 1$ больший корень выходит за пределы области допустимых значений ($x > 1$), а значит, на кольце не существует точек устойчивого равновесия в интервале $\varphi \in (0, 2\pi)$. Единственным возможным состоянием покоя остаётся вырожденный случай $\varphi = 0$, когда бусинка упирается в крепление кольца.

Напротив, при $k \in (0, 1)$ больший корень всегда лежит в интервале $(0, 1)$, что гарантирует существование физически реализуемого минимума потенциальной энергии. Таким образом, критическим значением является $k = 1$: при его превышении груз становится слишком тяжёлым, чтобы бусинка могла находиться в устойчивом равновесии где-либо, кроме точки крепления кольца.

Для ответа на вопрос третьего пункта сменим логику рассуждений. Допустим, при некотором угле $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$ и равных массах груза и бусинки ($k = 1$) существует положение равновесия. Тогда вектор полной силы реакции (суммы сил трения и нормальной реакции), действующей на бусинку со стороны кольца, может быть отклонён от нормали на угол, не превышающий угла трения (в данном случае $\frac{\varphi}{2}$).

С другой стороны, рассмотрим равнодействующую силы тяжести и силы натяжения нити. Сила натяжения направлена под углом $\frac{\varphi}{2}$ к вертикали. При $k = 1$ силы натяжения и тяжести равны по модулю, поэтому их равнодействующая направлена по биссектрисе угла между ними, то есть под углом $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4}$ к вертикали. Легко показать, что угол между этой равнодействующей и нормалью к кольцу составляет $\frac{3\varphi}{4}$.

Таким образом, равнодействующая сил натяжения и тяжести отклонена от нормали на угол, превышающий угол трения. Поскольку линия действия этой равнодействующей никогда не попадает внутрь конуса трения, равновесие в указанном диапазоне углов невозможно.

Ответ: $\varphi_1 = 60^\circ$ (устойчивое положение равновесия), $\varphi_2 \approx 250,5^\circ$ (неустойчивое положение равновесия), $v_{\min} \approx 1,74 \sqrt{gR}$; при $k > 1$ не существует положений

устойчивого равновесия на кольце за исключением особого случая $\varphi = 0$; устойчивых положений равновесия при $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$ нет.

5. В потоке (9 баллов)

П. Крюков

В задаче рассматривается эффект конденсации водяного пара в областях пониженного давления, возникающих при обтекании препятствий потоком влажного воздуха. Вследствие этого эффекта вблизи задней кромки крыльев и вдоль фюзеляжа самолёта может возникать так называемый «паровой конус».

Далее рассматривается стационарное адиабатическое течение невязкого идеального газа. Это подразумевает, что параметры потока в каждой точке неизменны во времени, теплообмен отсутствует, а внутренним трением можно пренебречь.

Числом Маха $M = \frac{v}{c}$ называется отношение скорости потока v в некоторой точке к скорости звука c в той же точке. Скорость звука определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

Воздух считайте идеальным газом с показателем адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$ и молярной массой $\mu = 29$ г/моль. Адиабатический процесс описывается уравнением $P\rho^{-\gamma} = \text{const}$, где P — давление, а ρ — плотность.

Также считайте известным соотношение, выражающее закон сохранения энергии для стационарного потока (уравнение Бернулли для сжимаемого газа):

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_p T}{\mu} = \text{const}.$$

- Самолёт летит в воздухе с температурой $T_0 = 295$ К и давлением $P_0 = 101,325$ кПа. В системе отсчёта самолёта скорость набегающего потока вдали от него соответствует числу Маха $M_0 = 0,35$. При обтекании крыльев и некоторых частей фюзеляжа скорость воздуха увеличивается, достигая максимального значения, соответствующего $M_{\text{max}} = 0,5$.

При каком максимальном значении относительной влажности φ_{max} окружающего воздуха образование парового конуса невозможно? Зависимость давления насыщенного пара воды от температуры представлена на рис. 9 (см. графические приложения).

Решение. Изучив график, отметим, что в окрестности температуры $T_0 = 295$ К парциальное давление водяного пара пренебрежимо мало по сравнению с давлением воздуха. Следовательно, изменение состояния пара в потоке определяется изменением параметров воздуха. Из уравнения Бернулли для сжимаемого газа и определения числа Маха следует, что вдоль линии тока сохраняется величина:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma RT}{\mu(\gamma - 1)} = \text{const} \implies T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) = \text{const}.$$

При выводе использовалось следующее из формулы Майера $c_p - c_v = R$ соотношение $\gamma - 1 = \frac{R}{c_v}$.

Приравняем значения этой постоянной величины вдали от самолёта и в точке, где число Маха равно M . Отношение температур составит:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что минимум температуры достигается при максимуме числа Маха. Для заданных чисел Маха ($M_0 = 0,35$, $M_{\text{max}} = 0,5$) получаем, после подстановки в формулу (8), значение $T_{\text{min}} \approx 287,8$ К.

С другой стороны, уравнение адиабаты при помощи уравнения Менделеева — Клапейрона ($P/\rho = RT/\mu$) приводится к виду:

$$P \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \text{const}.$$

Следовательно, отношение давлений в двух точках потока определяется выражением:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (9)$$

Показатель степени в формуле (9) для воздуха равен 3,5, поэтому минимуму температуры в потоке соответствует минимум давления. Парциальное давление пара $P_{\text{п}}$ в каждой точке пропорционально общему давлению ($P_{\text{п}}/P = \text{const}$), то есть при адиабатическом охлаждении оно убывает по степенному закону. В то же время давление насыщения $P_{\text{нас}}(T)$ при понижении температуры падает гораздо стремительнее — по закону, близкому к экспоненциальному.

Вследствие этого траектория состояния пара на диаграмме (P, T) может пересечь кривую насыщения. Очевидно, что в предельном случае точка росы будет достигнута там, где охлаждение максимально — то есть в области максимального числа Маха. Таким образом, условие начала конденсации пара в потоке сводится к достижению паром состояния насыщения в точке с температурой T_{min} .

Отсюда следует алгоритм определения предельного значения влажности: определяем по графику давление насыщения при температуре T_{min} . Рассчитываем по формуле (9) давление пара при температуре T_0 :

$$P_{\text{п}}(T_0) = P_{\text{нас}}(T_{\text{min}}) \left(\frac{T_0}{T_{\text{min}}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

и далее находим максимальную влажность:

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{P_{\text{п}}(T_0)}{P_{\text{нас}}(T_0)} = \frac{P_{\text{нас}}(T_{\text{min}})}{P_{\text{нас}}(T_0)} \cdot \left(\frac{T_0}{T_{\text{min}}} \right)^{3,5}. \quad (10)$$

Судя по графику, значение давления насыщения при минимальной температуре $T_{\text{min}} = 287,8$ К составляет $P_{\text{нас}}(T_{\text{min}}) \approx 1,68$ кПа, а при начальной температуре $T_0 = 295$ К давление насыщения равно $P_{\text{нас}}(T_0) \approx 2,65$ кПа. Подставляя найденные значения в формулу (10), получаем ответ:

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{1,68}{2,65} \cdot \left(\frac{295}{287,8} \right)^{3,5} \approx 0,69 = 69\%.$$

Ответ: $\varphi_{\text{max}} \approx 69\%$.

Графическое приложение см. на листе 6

Графические приложения

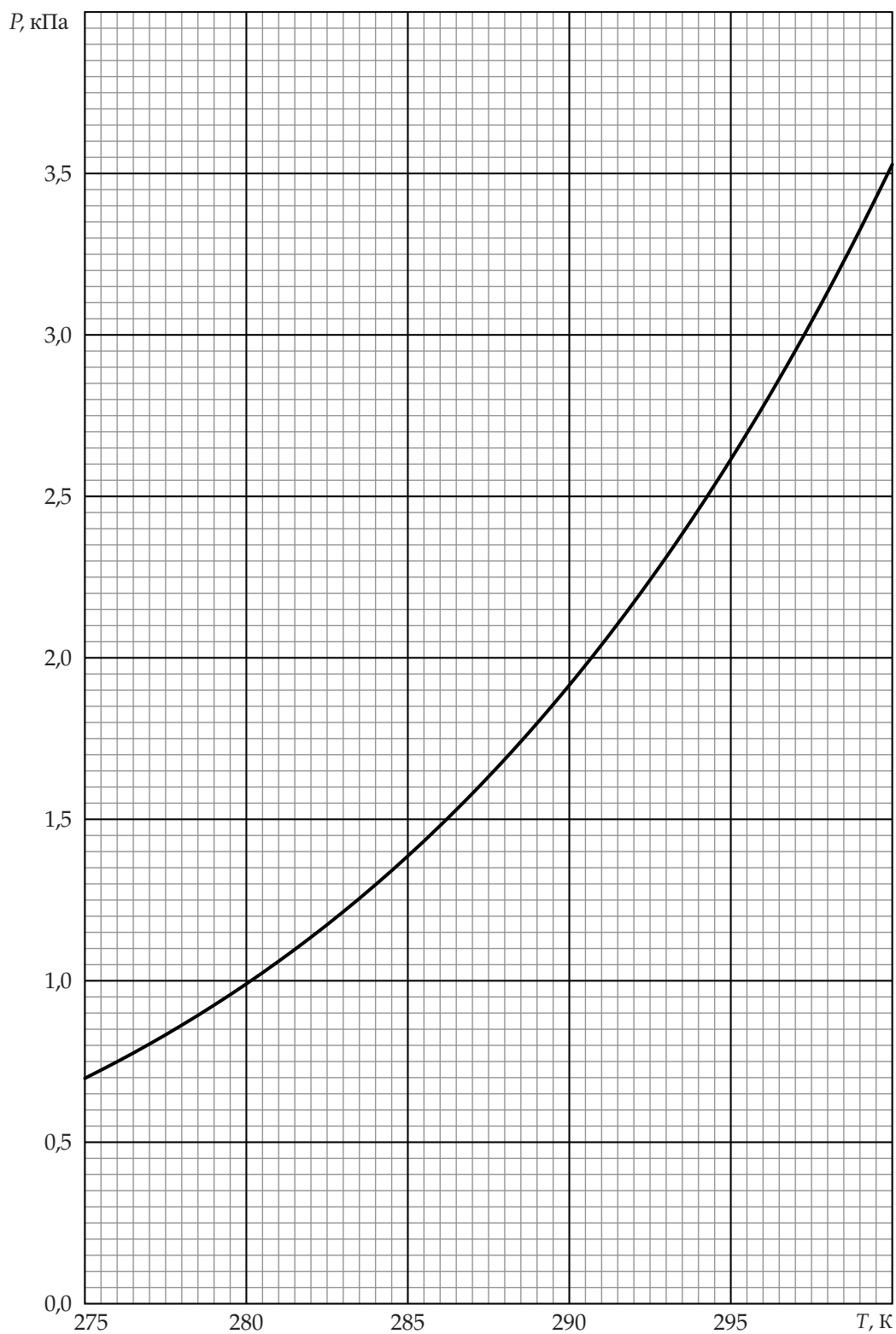


Рис. 9: Зависимость давления насыщенного пара воды от температуры, к задаче 5