2-й отборочный тур

Короткие решения и ответы

1. Мгновенный центр вращения квадрата находится в точке O пересечения перпендикуляров к диагоналям AC и BD, проведённым в точках A и B, при этом справедливо равенство $AO = BO = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 10$ см, где a — длина стороны квадрата. Угловая скорость вращения квадрата равна $\Omega = \frac{v\sqrt{2}}{a} \approx 1$ рад/с. Центр масс квадрата совпадает с точкой пересечения его диагоналей, скорость этой точки равна

$$V = \Omega \cdot a = v\sqrt{2} \approx 14 \text{ см/с}.$$

Количество полных оборотов, совершаемых квадратом за время $t = 30$ с, определяется по формуле

$$n = \left\lfloor \frac{\Omega t}{2\pi} \right\rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x. Расчёт даёт $n = 4$.

2. Покажем энергетический (не самый простой и очевидный) способ решения этой задачи. Другой способ решения предполагает запись второго закона Ньютона для двух шарниров.

Пусть под действием силы F шарнир C и груз совершают бесконечно малое перемещение dx ($dx < 0$; считаем, что ось OX перпендикулярна стене и направлена от неё, при этом координата стены равна нулю), тогда справедливо равенство

$$-Fdx = dT + dW, \tag{1}$$

где $dT = mv_x dv_x$ — бесконечно малое изменение кинетической энергии груза, а $dW = kydy$ — бесконечно малое изменение потенциальной энергии пружины (k — коэффициент упругости, y — деформация пружины). Разделив соотношение (1) на dx, и учитывая равенства $v_x = \frac{dx}{dt}$, $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, получим формулу

$$a_x = -\frac{1}{m}\left(F + ky \cdot \frac{dy}{dx}\right), \tag{2}$$

Зависимость $y(x)$ деформации пружины от координаты x вершины C ромба даётся соотношением

$$y = 2\sqrt{l^2 - \frac{x^2}{4}} - 1{,}2l, \tag{3}$$

дифференцируя которое, получаем равенство

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4l^2 - x^2}} = -\operatorname{tg}\alpha(x), \tag{4}$$

где $\alpha(x)$ обозначен угол между диагональю BD и стороной ромба. В рассматриваемом состоянии (когда длина пружины равна $l\sqrt{2}$) $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Подставляя равенства (3) и (4) в формулу (2), получим ответ

$$|a_x| = \frac{1}{m}\left(F - kl(\sqrt{2} - 1{,}2)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) \approx 8 \text{ м/с}^2.$$

3. При ответе на первый вопрос скорости доски (u') и кубика (v') в лабораторной системе отсчёта в момент, когда кубик достигает конца доски, находятся из закона сохранения импульса:

$$mv = m\left(u' + \frac{v}{4}\right) + 2mu'$$

и оказываются равны $u' = \frac{v}{4}$ и $v' = u' + \frac{v}{4} = \frac{v}{2}$. Поскольку выделяющееся количество теплоты Q равно уменьшению кинетической энергии системы, искомое отношение равно

$$\frac{Q}{T} = \frac{2m(u')^2 + m(v')^2}{mv^2} = \frac{5}{8} \approx 0{,}6.$$

В процессе движения и доска, и кубик испытывают действие сил трения. Пусть к моменту, когда кубик оказывается у конца доски, работа силы трения, действующей на кубик, оказывается равна A_1, а работа силы трения, действующей на доску, равна A_2, тогда суммарная работа сил трения удовлетворяет соотношению

$$A_{\text{тр}} = A_1 + A_2 = -\mu mg(S + L) + \mu mgS = -\mu mgL,$$

где S — перемещение доски, а L — её длина. Суммарная работа сил трения равна по абсолютной величине выделившемуся количеству теплоты Q, которое фактически уже найдено при ответе на первый вопрос. Таким образом, коэффициент трения равен

$$\mu = \frac{Q}{mgL} = \frac{5}{8} \cdot \frac{mv^2}{2mgL} = \frac{5}{16} \cdot \frac{v^2}{gL} = 0{,}5.$$

4. При ответе на вопрос первого пункта сначала определяется скорость второй частицы после столкновения по закону сохранения импульса (очевидно, что в этом пункте все скорости направлены вдоль одной прямой). Таким образом, скорости частиц после столкновения равны

$$v_1' = \frac{v}{3}, \qquad v_2' = \frac{2v}{3}.$$

Теперь легко вычисляется суммарная кинетическая энергия после взаимодействия, она оказывается равна $E' = \frac{5E}{9}$, где E — кинетическая энергия до взаимодействия (энергия налетающий частицы). Энергия возбуждения E_0 равна разности кинетических энергий до и после взаимодействия, поэтому ответ на первый вопрос: $k = \frac{E}{E-E'} = \frac{9}{4} = 2{,}25$. Следует выбрать столбец 5.

Покажем, как получить ответ на вопрос второго пункта, строя рассуждения в лабораторной системе отсчёта. Из закона сохранения импульса в этом случае следует уравнение

$$v^2 = \left(v_1'\right)^2 + \left(v_2'\right)^2 + 2v_1'v_2'\cos\beta. \tag{5}$$

С другой стороны, из закона сохранения энергии имеем уравнение

$$\frac{4E_0}{m} = \left(v_1'\right)^2 + \left(v_2'\right)^2. \tag{6}$$

Вычитая из уравнения (5) уравнение (6), с учётом формулы $\frac{mv^2}{2} = 3E_0$, получаем равенство $E_0 = v_1'v_2'\cos\beta$, которое даёт для скорости второй частицы соотношение $v_2' = \frac{E_0}{v_1'\cos\beta}$. Подставив скорость v_2' из этого соотношения в уравнение (6), после преобразований получим биквадратное уравнение

$$\left(v_1'\right)^4 - \frac{4E_0}{m}\left(v_2'\right)^2 + \frac{E_0^2}{m^2\cos^2\beta} = 0. \tag{7}$$

Условие существования решения уравнения (7) (дискриминант не меньше нуля) приводит к неравенству $\cos\beta \geq \frac{1}{2}$. Таким образом, искомый максимальный угол равен 60°. Отметим, что неравенство $\cos\beta \leq -\frac{1}{2}$ невозможно, поскольку в формуле $E_0 = v_1' v_2' \cos\beta$ все сомножители должны быть положительными. Таким образом, следует выбрать столбец 4.

5. Обозначим U_0 — напряжение источника, а R — сопротивление резистора, тогда искомый ток — это решение уравнения

$$U_L(I) = U_0 - IR, \tag{8}$$

где $U_L(I)$ — зависимость напряжения на лампочке от тока, задаваемая графиком. Уравнение (8) решается графически: на графике вольт-амперной характеристики лампочки строится график правой части уравнения (8), имеющий вид прямой, и находится точка пересечения, в результате получается $I \approx 0{,}5$ А. Следует выбрать столбец 3.

Разность температур лампочки и окружающей среды пропорциональна выделяющейся в лампочке мощности. Судя по графику, при подключении без резистора на лампочке выделяется мощность, равная $5 \cdot 0{,}62$ Вт $= 3{,}1$ Вт (приближённо), а при подключении последовательно с резистором выделяется мощность, равная $3{,}5 \cdot 0{,}5$ Вт $= 1{,}75$ Вт. Таким образом, при подключении последовательно с резистором разность температур лампочки и окружающей среды равна

$$t_2 - t_0 \approx \frac{3{,}5 \cdot 0{,}5}{5 \cdot 0{,}62} \cdot 32\ ^\circ\text{C} \approx 18\ ^\circ\text{C},$$

поэтому температура лампочки $t_2 \approx 38\ ^\circ$C и выбрать следует столбец 4.