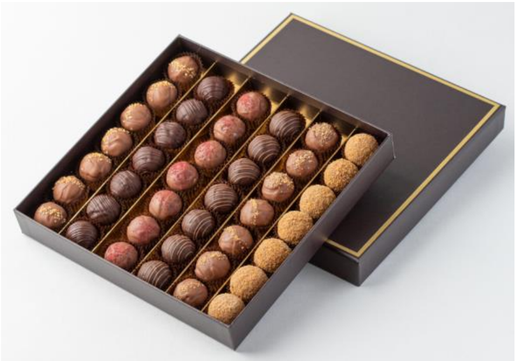
Олимпиада ПриМат

Старшая лига

Задача 1.



Паша гуляет по магазину и ему захотелось купить своих любимых конфет. Обычно он брал либо маленькую коробку за S_1 = 300 рублей, в которой ровно $N_1 = 5$ конфет, либо большую коробку за S_2 = 700 рублей. Он никогда не считал, сколько конфет в большой коробке (N_2), но он уверен, что их точно больше 20, так как один раз он ел конфеты из такой коробки, насчитал 20 и там еще оставалось. Сегодня ему на глаза попалась средняя коробка, больше маленькой, но меньше большой. У него с собой только 435 рублей, а ценник на коробке стерся, помогите Паше оценить стоимость этой коробки, хватит ли ему денег, чтобы ее купить. Известно, что производитель очень честный и цена на коробку конфет формируется из цены самих конфет и цены за картон, из которого сделана коробка, пропорционально их массам. Также у малой и большой коробки известен вес самих коробок (масса, указанная на ценнике), они составляют m_1 = 100 и m_2 = 200 грамм соответственно. Ценник на средней коробке хоть и стерт, но не полностью, Паша разглядел, что ее масса составляет m_3 = 150 граммов. Также Паша уверен, что в средней коробке не больше 15 конфет (N_3).

Решение:

Цена на коробку конфет складывается из цены за массу самих конфет и цены за саму коробку. Пусть цена за 1г картона (или материала коробки) равна k_2 руб/г, за конфеты – k_1 руб/г, массу одной конфеты обозначим за m_0 г, тогда составим уравнения:

$$m_0 \cdot N_1 \cdot k_1 + k_2 \cdot m_1 = S_1,$$

$$m_0 \cdot N_2 \cdot k_1 + k_2 \cdot m_2 = S_2,$$

$$m_0 \cdot N_3 \cdot k_1 + k_2 \cdot m_3 = S_3.$$

Из первых двух уравнений выразим k_2 и величину $A = m_0 \cdot k_1$, так как это 2 линейных уравнения относительно этих 2 неизвестных:

$$A = \frac{m_1 S_2 - m_2 S_1}{m_1 N_2 - m_2 N_1}, \qquad k_2 = \frac{N_2 S_1 - N_1 S_2}{m_1 N_2 - m_2 N_1}.$$

Далее есть 2 варианта решения, первое – точное, второе – не совсем правильное:

1) Мы будем оценивать итоговую величину S_3.
   Если подставить A, k_2 в уравнение для стоимости средней коробки, то можно получить следующее уравнение
   $$S_3 = 50 \cdot \left[9 + \frac{2N_3 - 15}{N_2 - 10}\right].$$
   Его минимизация зависит от знака числителя дроби (знаменатель всегда положителен по условиям задачи). Если числитель отрицателен, то надо выбирать наименьшее N_3(среди тех, что делают числитель отрицательным), а N_2 нужно минимизировать, чтобы отрицательная по знаку дробь была максимальна по модулю. Если же числитель положителен, то для минимизации стоимости S_3 надо выбирать наименьшее N_3(среди тех, что делают числитель положительным), а N_2 надо выбирать наибольшим. В таком

случае получаем $N_3 = 6, N_2 = 20$ и $N_3 = 15, N_2 \to \infty$ для второго, а стоимости S_3 равны соответственно 435 и 450 рублей.

2) Оценим каждую из этих величин. Величина А имеет фиксированный числитель, а в знаменателе меняется только N_2, значит при минимальном $N_2 = 21$ она будет иметь максимальное значение, для оценки воспользуемся $N_2 = 20$. Сверху N_2 по условию задачи никак не ограничено, поэтому формально минимальное значение А равняется 0 при стремлении N_2 к бесконечности.
Величина k_2 в числителе имеет N_2, поэтому подставим числовые значения остальных величин и преобразуем дробь:

$$k_2 = \frac{N_2 \cdot 300 - 5 \cdot 700}{100 \cdot N_2 - 200 \cdot 5} = \frac{3N_2 - 35}{N_2 - 10} = 3 - \frac{5}{N_2 - 10}.$$

Теперь очевидно, что при минимальном N_2 эта величина принимает минимальное значение, а при стремлении N_2 в бесконечность, наоборот, максимальное.
Итого имеем

$$A \in (0; 10), \quad k_2 \in (2.5; 3.0)$$

Но нужно учитывать, что А принимает минимальное значение, когда k_2 принимает максимальное значение и наоборот. Для оценки нам нужна минимальная стоимость средней коробки конфет, тогда для этого нужно принять $N_3 = 6$. Тогда имеем

$$S_3 \in (435; 450)$$

Важно отметить, что наши оценки дали нам интервал с выколотыми границами, а сумма у Паши на руках составляет ровно 435 рублей, значит ему не хватит денег на среднюю коробку. Осталось только доказать, что среди промежуточных (возможных, так как не все А и k_2 из этих диапазонов возможны, так как они оба зависят от одного параметра - N_2) вариантов не будет того, что даст меньшую сумму. В этом случае еще надо доказать, что среди промежуточных случаев нет того, что дает меньшее значение. Без этого решение нельзя считать строгим, в отличие от первого варианта, в котором мы сразу напрямую получили минимумы в обоих случаях.

Задача 2.

Вова забыл разморозить 2 кг курицы, которая лежит в морозилке при температуре −18 °С. Мама придёт через 30 минут.

Есть один быстрый способ разморозить курицу: положить в горячую воду(85°С) при этом постоянно обновлять воду, чтобы температура оставалась постоянной;

Вова не первый раз попадает в такую ситуацию. Он знает: если температура поверхности превысит 60°С, появятся белые пятна — мама сразу заметит обваривание.

Необходимо оценить, успеет ли курица разморозиться за 30 минут, то есть, когда её температура в центре достигнет 0 °С и поверхность не обварится (не достигнет 60 °С). Считать, что внутри курицы есть некоторая маленькая, но конечного размера, область – это центр, занимающий 0.13% всей курицы, а поверхностью считать некоторый слой курицы около ее поверхности, занимающий 0.33%. Тепло по курице распространяется мгновенно, но центр получает 0.1% всего теплового потока, а поверхность 1%.

Плотность курицы: ρ = 1000 кг/м³.

Удельная теплоёмкость курицы: c = 2800 Дж/(кг·К).
Коэффициент теплообмена с водой: h_вода = 40 Вт/(м²·К)
(курица получает тепло через поверхность от воды, чем больше разность температур, тем выше тепловой поток).

Решение:
Оценим площадь поверхности курицы. Объем курицы: $V = \frac{m}{\rho} = \frac{2}{1000} = 0{,}002\ \text{м}^3$. Предположим, что у нее форма шара, тогда его радиус равен:

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \approx 0{,}078\ \text{м}.$$

Площадь поверхности курицы:

$$S = 4\pi R^2 \approx 0{,}077\ \text{м}^2.$$

Предположим, что мощность теплового потока пропорциональна площади поверхности и разности температур поверхности с окружающей средой:

$P = hS\Delta T.$

Напишем уравнение для температуры курицы в центре и на поверхности. Мы знаем, какая часть теплового потока P подводится к каждой части, а также мы знаем массу каждой части, поэтому можем посчитать количество тепла, необходимого для нагрева до определенной температуры:

$$c \cdot m \cdot \big(T(t) - T(0)\big) = P \cdot k \cdot t$$

Где k – коэффициент подводимого тепла к части с массой m.

Для центра и поверхности:

$m_\text{ц} = m \cdot a_\text{ц},\ a_\text{ц} = 0.0013, \quad k_\text{ц} = 0.001, \quad T_\text{ц} = T_\text{ц}(0) + \frac{hS}{cm} \cdot \Delta T \cdot k_\text{ц} \cdot t \cdot \frac{1}{a_\text{ц}}.$

$m_\text{п} = m \cdot a_\text{п},\ a_\text{п} = 0.0033, \quad k_\text{ц} = 0.01, \quad T_\text{п} = T_\text{п}(0) + \frac{hS}{cm} \cdot \Delta T \cdot k_\text{п} \cdot t \cdot \frac{1}{a_\text{п}}.$

Заметим, что ΔT в этом процессе не может оставаться постоянной, в самом начале она составляет 103 °C, но если курица будет близка к 60 °C на поверхности, то разница температур составит всего 25 °C.

Из уравнения видно, что разница искомой температуры с исходной линейно зависит от времени и ΔT, это означает, что температура в центре и на поверхности будет одинаково пропорционально отличаться при различных ΔT, достигая конкретных абсолютных значений при разных временах t. Это означает, что если при каком-то случае поверхность курицы не обварится, то и при ΔT зависящем от времени этого не произойдет. Значит рассмотрим худший случай, когда курица на грани обваривания и ее поверхность имеет температуру 60 °C, тогда ΔT составит 25 °C.

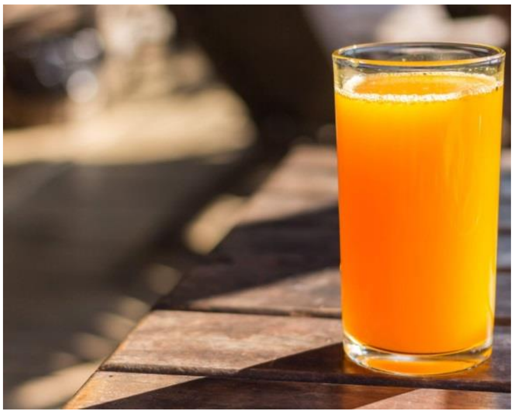
Теперь рассчитаем температуру, которая достигается на поверхности и в центре через 30 минут:

$$T_\text{ц}(30\ \text{мин}) \approx 0.54\ °\text{C}, \qquad T_\text{п}(30\ \text{мин}) \approx 56.8\ °\text{C}.$$

Получается, что за эти 30 минут условие того, что разность температур не стала меньше 25 °C выполняется, а значит расчет верен. И температура не превысила 60 °C на поверхности, а в центре превысила 0 °C, значит курица успеет разморозиться.

(Примечание: если в решении использовалась другая форма, отличная от шара, такое решение также будет принято, если все вычисления верны, ответ может отличаться от приведенного в решении здесь).

Задача 3.



В организм попало 100 мг несвежего сока. За первые 30 минут концентрация в крови уменьшается на 5% каждую минуту, затем скорость выведения снижается вдвое и так происходит каждые последующие полчаса.

Есть два варианта: остаться и ждать естественного выведения дома или сразу пойти в аптеку (15 минут в пути в одну сторону). Во время ходьбы выведение замедляется на 15% из-за усталости каждые 5 минут (эффект проявится только после наступления 5 минуты, аналогично при возвращении домой эффект усталости от ходьбы сразу пропадает на 30 минуте). Абсорбент из аптеки принимается только дома после возвращения и увеличивает скорость выведения на 100%, но не сразу, а постепенно достигая полного эффекта за 5 минут.

Безопасный уровень вещества — 6 мг. Если его не достигнуть за 1.5 часа после попадания в организм, заболит живот. Какую стратегию выбрать?

Решение:

Обозначим начальную концентрацию за C_0. Запишем условие, что каждую следующую i-ую минуту концентрация уменьшается на 5%

$$C_{i+1} = C_i \cdot 0.95$$

Выпишем первые несколько членов этой последовательности (такие последовательности называются рекуррентными) и будем выражать каждый через все предыдущие

$$C_3 = C_2 \cdot 0.95^1 = C_1 \cdot 0.95 \cdot 0.95 = C_1 \cdot 0.95^2 = C_0 \cdot 0.95^3$$

Заметим, что каждый i-ый член выражается через нулевой и степень 0.95, значит пока скорость выведения v остается постоянной (в данном случае равной 0.05), справедлива формула

$$C_i = C_0 \cdot (1 - v)^i$$

Через полчаса скорость выведения падает в 2 раза, новая $v = 0.025$, соответственно можно принять C_{30} за новую C_0 и повторить вычисление столько раз, сколько необходимо.

Вычислим концентрацию через полчаса, час и полтора часа соответственно:

$$C_{30} = C_0 \cdot 0.95^{30}$$

$$C_{60} = C_{30} \cdot 0.975^{30}$$

$$C_{90} = C_{60} \cdot 0.9875^{30}.$$

Итого через 30 минут концентрация станет ≈ 21.5 мг, через час ≈ 10.0 мг, через полтора часа ≈ 6.9 мг, значит этот вариант не подходит.

Рассмотрим вариант с походом в аптеку за лекарством. Базовая скорость выведения 5% в минуту, во время ходьбы она будет замедляться каждые 25 минут, поэтому в первые 5 минут справедлива предыдущая формула.

$$C_{i+1} = C_i \cdot 0.95.$$

Далее на 5 минуте наступает первый эффект от усталости при ходьбе, формула закон для концентрации в следующую минуту меняется на

$$C_{i+1} = C_i \cdot (1 - 0.05 \cdot 0.75).$$

Через 5 минут будет справедлив закон

$$C_{i+1} = C_i \cdot (1 - 0.05 \cdot 0.75^2).$$

И так далее еще 4 раза на 10, 15, 20 и 25 минуте (на 30 минуте ничего не происходит, так как считаем, что усталость мгновенно проходит по приходе домой), так как дорога до аптеки 15 минут и 15 минут обратно.

Для этого этапа сделаем оценку худшего случая, худшим будет вариант, если на всем отрезке времени от аптеки и обратно эффект усталости будет максимальным, как на 25 минуте, в таком случае для первых 30 минут будет справедлива оценка

$$C_{30} < C_0 \cdot (1 - 0.05 \cdot 0.85^5)^{30} \approx 51.0 \text{ мг}.$$

(Примечание: если бы мы не делали оценку, реальная величина была бы 34.7 мг).

Далее было принято лекарство. Также надо не забыть, что условие снижения скорости вдвое каждые полчаса все еще действует, поэтому $v_1 = 0.025$. Для лекарства можно принять следующую зависимость на первые 5 минут, где τ – прошедшее время с приема лекарства (от 0 до 5 минут):

$$v = v_1 \cdot \left(1 + 0.8 \cdot \frac{\tau}{5}\right).$$

При этом каждую минуту происходит снижение концентрации во время этого процесса, поэтому здесь также сделаем оценку худшего случая – худшим будет случай, когда первые 5 минут лекарство не действует вообще никак и начинает действовать только через 5 минут, тогда для первых 5 минут справедлив закон:

$$C_{i+1} = C_i \cdot 0.975.$$

Значит через 5 минут концентрация будет равна

$$C_{35} = C_{30} \cdot 0.975^5 \approx 44.9.$$

После этого скорость выведения возрастает на 80% из-за лекарства и становится равной $v_2 = 0.025 \cdot 1.8 = 0.045$, и следующие 25 минут будет справедлив закон

$$C_{i+1} = C_i \cdot (1 - 0.045).$$

Тогда

$$C_{60} = C_{35} \cdot 0.955^{25} \approx 12.5.$$

После чего скорость падает еще вдвое $v_2 = 0.045 \cdot 0.5 = 0.0225$ и через 30 минут концентрация станет

$$C_{90} = C_{60} \cdot 0.9775^{30} \approx 5.8$$

(Примечание: если бы все вычисления были точны, без оценки наихудшего случая, то итоговая концентрация через 1.5 часа была бы равна ≈ 3.8*).*