

Олимпиада ПриМат

Младшая лига

Задача 1.



Честный производитель продаёт конфеты по цене: конфеты — 1 рубль за грамм, картонная упаковка — 0,8 рублей за грамм. Паша часто берет конфеты этого производителя и знает, что коробка из 6 конфет стоит примерно 300 рублей, а коробка из 12 конфет около 500. Конфеты представляют собой цилиндрики с высотой $h = 3$ см и радиусом $r = 1,5$ см.

Сегодня он увидел коробку из 10 конфет, изначально он планировал купить маленькую 6 конфетную пачку. Но может быть, ему хватит на коробку из 10 конфет,

только вот незадача, ценника нигде нет – можете оценить стоимость, и понять, хватит ли Паше 399 рублей?

Плотность конфет известна и равна $\rho = 1,18$ г/см³, а картона $\rho_{\text{картона}} = 1,25$ г/см³.

Решение:

Объем одной конфеты (цилиндра): $V_{\text{конфеты}} = \pi r^2 h = 21,21$

Масса одной конфеты: $m_{\text{конфеты}} = V_{\text{конфеты}} * \rho = 25$

Тогда вес 6 конфет: $25 * 6 = 150$

Аналогично вес 12 конфет: $25 * 12 = 300$

Составим уравнения для оценки стоимости первой и второй картонной упаковки:

$$1 * 6 * m_{\text{конфеты}} + 0,8 * V_1 \rho_{\text{картона}} = S_1$$

$$1 * 12 * m_{\text{конфеты}} + V_2 \rho_{\text{картона}} = S_2$$

Если все подставить, получим

$$0,8 * V_1 \rho_{\text{картона}} = S_1 - 1 * 6 * m_{\text{конфеты}} = 300 - 150 = 150$$

$$0,8 * V_2 \rho_{\text{картона}} = S_2 - 1 * 12 * m_{\text{конфеты}} = 500 - 300 = 200$$

Можно утверждать, что: $V_1 < V_3 < V_2$ тогда стоимость картонной упаковки для 10 конфет:

$$S_3^* < S_3 < S_3^{**}$$

Где стоимость S_3^* формируется из стоимости самой коробки, используемой для продажи 6 конфет + стоимости 10 конфет:

$$S_3^* = 0,8 * V_1 \rho_{\text{картона}} + 1 * 10 * m_{\text{конфеты}} = 150 + 250 = 400$$

Аналогично:

$$S_3^{**} = 0,8 * V_2 \rho_{\text{картона}} + 1 * 10 * m_{\text{конфеты}} = 200 + 250 = 450$$

То есть Паше не хватит 399 рублей.

Задача 2.

Вова забыл разморозить 1 кг курицы, которая лежит в морозилке при температуре $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$. Мама придёт через 30 минут. Температура в комнате $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Есть четыре способа разморозить курицу:

1. Оставить целиком при комнатной температуре;
2. Положить в горячую воду (85°C) при этом постоянно обновлять воду, чтобы температура оставалась постоянной;



3 и 4 способа аналогичны первому и второму, но Вова предварительно разрежет курицу на 4 части

Необходимо оценить, при каком варианте курица успеет разморозиться за 45 минут, то есть, когда её температура в центре достигнет $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Оцените, какой из способов подойдет для этого.

Плотность курицы: $\rho = 1000\text{ кг/м}^3$.

Удельная теплоёмкость курицы: $c = 2800\text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$.

Коэффициент теплообмена с воздухом: $h_{\text{воздух}} = 15\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{K)}$.

Коэффициент теплообмена с водой: $h_{\text{вода}} = 40\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{K)}$

(курица получает тепло через поверхность от воды, чем больше разность температур, тем выше тепловой поток)

Решение:

- 1) Рассчитаем тепло необходимое для повышения температуры от $T_0 = -18$ до $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$:
 $Q = mc(T - T_0) = 1 * 2800 * 18 = 50400\text{ Дж}$

- 2) Оценим площадь поверхности курицы:

$$\text{Объем курицы: } V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{1000} = 0,001\text{ м}^3$$

Предположим, что у нее форма шара, тогда его радиус равен:

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \approx 0,062\text{ м}$$

Площадь поверхности курицы:

$$S = 4\pi R^2 \approx 0,048\text{ м}^2$$

А при разделении на 4 равные части каждая имеет объем:

$$V_1 = 0,00025\text{ м}^3$$

$$\text{Радиус: } R_1 = \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3} \approx 0,039\text{ м}$$

$$\text{Площадь поверхности одного куска: } S_1 = 4\pi R_1^2 \approx 0,019\text{ м}^2$$

$$\text{Общая площадь всех кусков: } 4 * S_1 = 0,077\text{ м}^2$$

- 3) Время размораживания:

$$t \approx \frac{Q}{P},$$

Где $P = hS\Delta T$, предполагая, что мощность теплового потока пропорциональна поверхности, через которую поступает тепло.

- 4) Оценим каждый вариант:

Заметим, что чем меньше, ΔT тем больше t , для оценки нужно использовать максимальное и минимальное значения.

Целая курица при комнатной температуре с минимальным ΔT : $t \approx \frac{50400}{15 \cdot 0,048 \cdot (25-0)} \approx 2800 \text{ с} \approx 46.7 \text{ мин}$
В случае максимального ΔT : $t \approx 27.1 \text{ мин}$

Целая курица в горячей воде с минимальным ΔT : $t \approx \frac{50400}{40 \cdot 0,048 \cdot (85-0)} \approx 308 \text{ с} \approx 5.1 \text{ мин}$
В случае максимального ΔT : $t \approx 4.3 \text{ мин}$

Разрезанная на 4 части курица при комнатной температуре с минимальным ΔT : $t \approx \frac{50400}{15 \cdot 0,077 \cdot (25-0)} \approx 1745.5 \text{ с} \approx 29.1 \text{ мин}$
В случае максимального ΔT : $t \approx 16.9 \text{ мин}$

Разрезанная на 4 части курица в горячей воде с минимальным ΔT : $t \approx \frac{50400}{40 \cdot 0,077 \cdot (85-0)} \approx 192.5 \text{ с} \approx 3,2 \text{ мин}$
В случае максимального ΔT : $t \approx 2.7 \text{ мин}$

Разморозить курицу за час можно либо горячей водой в любом случае, либо разрезать курицу на 4 части и просто оставить в комнате. А вот целая курица не успеет разморозиться за час просто стоя на воздухе в комнате.

(Примечание: если в решении использовалась другая форма, отличная от шара, такое решение также будет принято, если все вычисления верны, ответ может отличаться от приведенного в решении здесь)

Задача 3.

В организм попало 100 мг несвежего сока. За первые 30 минут концентрация в крови уменьшается на 5% каждую минуту, затем скорость выведения снижается вдвое и так происходит каждые последующие полчаса.



Есть два варианта: остаться и ждать естественного выведения дома или сразу пойти в аптеку (15 минут в пути в одну сторону). Во время ходьбы выведение замедляется на 15% из-за усталости каждые 5 минут (эффект проявится только после наступления 5 минуты, аналогично при возвращении домой эффект усталости от ходьбы сразу пропадает на 30 минуте). Абсорбент из аптеки принимается только дома после возвращения и увеличивает скорость выведения на 100%, но не сразу, а постепенно достигая полного эффекта за 5 минут.

Безопасный уровень вещества — 6 мг. Если его не достигнуть за 1.5 часа после попадания в организм, заболит живот. Какую стратегию выбрать?

Решение:

Обозначим начальную концентрацию за C_0 . Запишем условие, что каждую следующую i -ую минуту концентрация уменьшается на 5%

$$C_{i+1} = C_i \cdot 0.95$$

Выпишем первые несколько членов этой последовательности (такие последовательности называются рекуррентными) и будем выражать каждый через все предыдущие

$$C_3 = C_2 \cdot 0.95^1 = C_1 \cdot 0.95 \cdot 0.95 = C_1 \cdot 0.95^2 = C_0 \cdot 0.95^3$$

Заметим, что каждый i -ый член выражается через нулевой и степень 0.95, значит пока скорость выведения v остается постоянной (в данном случае равной 0.05), справедлива формула

$$C_i = C_0 \cdot (1 - v)^i$$

Через полчаса скорость выведения падает в 2 раза, новая $v = 0.025$, соответственно можно принять C_{30} за новую C_0 и повторить вычисление столько раз, сколько необходимо.

Вычислим концентрацию через полчаса, час и полтора часа соответственно:

$$C_{30} = C_0 \cdot 0.95^{30}$$

$$C_{60} = C_{30} \cdot 0.975^{30}$$

$$C_{90} = C_{60} \cdot 0.9875^{30}$$

Итого через 30 минут концентрация станет ≈ 21.5 мг, через час ≈ 10.0 мг, через полтора часа ≈ 6.9 мг, значит этот вариант не подходит.

Рассмотрим вариант с походом в аптеку за лекарством. Базовая скорость выведения 5% в минуту, во время ходьбы она будет замедляться каждые 25 минут, поэтому в первые 5 минут справедлива предыдущая формула

$$C_{i+1} = C_i \cdot 0.95$$

Далее на 5 минуте наступает первый эффект от усталости при ходьбе, формула закон для концентрации в следующую минуту меняется на

$$C_{i+1} = C_i \cdot (1 - 0.05 \cdot 0.75)$$

Через 5 минут будет справедлив закон

$$C_{i+1} = C_i \cdot (1 - 0.05 \cdot 0.75^2)$$

И так далее еще 4 раза на 10, 15, 20 и 25 минуте (на 30 минуте ничего не происходит, так как считаем, что усталость мгновенно проходит по приходе домой), так как дорога до аптеки 15 минут и 15 минут обратно.

Для этого этапа сделаем оценку худшего случая, худшим будет вариант, если на всем отрезке времени от аптеки и обратно эффект усталости будет максимальным, как на 25 минуте, в таком случае для первых 30 минут будет справедлива оценка

$$C_{30} < C_0 \cdot (1 - 0.05 \cdot 0.85^5)^{30} \approx 51.0 \text{ мг}$$

(Примечание: если бы мы не делали оценку, реальная величина была бы 34.7 мг)

Далее было принято лекарство. Также надо не забыть, что условие снижения скорости вдвое каждые полчаса все еще действует, поэтому $v_1 = 0.025$. Для лекарства можно принять следующую зависимость на первые 5 минут, где τ – прошедшее время с приема лекарства (от 0 до 5 минут):

$$v = v_1 \cdot \left(1 + 0.8 \cdot \frac{\tau}{5}\right)$$

При этом каждую минуту происходит снижение концентрации во время этого процесса, поэтому здесь также сделаем оценку худшего случая – худшим будет случай, когда первые 5 минут лекарство не действует вообще никак и начинает действовать только через 5 минут, тогда для первых 5 минут справедлив закон:

$$C_{i+1} = C_i \cdot 0.975$$

Значит через 5 минут концентрация будет равна

$$C_{35} = C_{30} \cdot 0.975^5 \approx 44.9$$

После этого скорость выведения возрастает на 80% из-за лекарства и становится равной $v_2 = 0.025 \cdot 1.8 = 0.045$, и следующие 25 минут будет справедлив закон

$$C_{i+1} = C_i \cdot (1 - 0.045)$$

Тогда

$$C_{60} = C_{35} \cdot 0.955^{25} \approx 12.5$$

После чего скорость падает еще вдвое $v_2 = 0.045 \cdot 0.5 = 0.0225$ и через 30 минут концентрация станет

$$C_{90} = C_{60} \cdot 0.9775^{30} \approx 5.8$$

(Примечание: если бы все вычисления были точны, без оценки наихудшего случая, то итоговая концентрация через 1.5 часа была бы равна ≈ 3.8)

