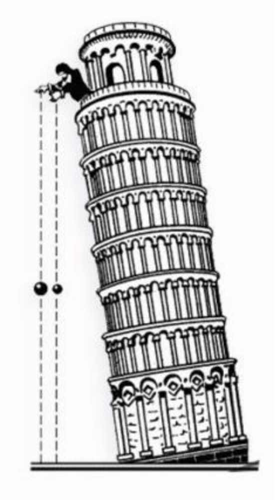
ПриМат олимпиада 2024.

Задачи 1. Младшие.

Маленький шарик отпустили без начальной скорости с высоты 20 м. Он падает на землю, абсолютно упруго отражается от нее и в отсутствие сопротивления воздуха периодически перемещается между землей и точкой старта. Где (кроме точки старта и поверхности земли) шарик оказывается через равные промежутки времени? Определите длительность этого промежутка.



Решение:

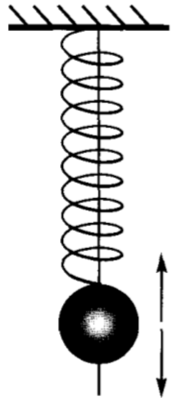
Шарик совершает периодическое движение с периодом $T = 2\tau$, где $\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2$ с. В каждой точке между поверхностью земли и точкой старта шарик оказывается дважды за период: при движении вверх и движении вниз. Промежутки между двумя последовательными появлениями шарика в какой-либо точке будут постоянными, если они составляют τ. Это произойдет в том случае, если время движения от точки старта до точки наблюдения составляет $\tau/2$, значит, она находится на расстоянии

$$d = \frac{g\tau^2}{8} = \frac{H}{4} = 5 \text{ м}$$

от точки старта, а значит **на высоте $\boldsymbol{h = H - d = 15}$ м над поверхностью земли**.

Промежуток времени при этом, как было отмечено, $\boldsymbol{\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2}$ **с**

Задача 1. Старшие.



Небольшой шарик, на котором закреплена лампочка, подвешен на пружине и качается вдоль вертикально расположенной линейки с сантиметровыми делениями. Лампочка освещает деление 10 см раз в секунду, а деление 5 см раз в две секунды.

a. Полагая, что свет от лампочки распространяется узким горизонтальным пучком, определите какие деления лампочка освещает во время движения.
b. Пусть деление освещено, если расстояние от него до лампочки по вертикали не более 1 мм. Оцените продолжительность каждого промежутка времени, в течение которого освещено деление 10 см.

Можно принять π=3.1, 1/π≈0.32

Решение:

a. Вертикальная координата лампочки находится из закона гармонических колебаний

$$z = z_0 + A\cos\omega t$$

Точка на линейка освещена, если ее координата совпадает с координатой лампочки. По условию, корни уравнения

$$10 = z_0 + A\cos\omega t_1$$

Образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 сек, а корни уравнения

$$5 = z_0 + A\cos\omega t_2$$

Арифметическую прогрессию с вдвое большей разностью. Такая ситуация возможна, только если t_1, t_2 соответствуют условиям $\cos\omega t_1 = 0,\ \cos\omega t_2 = \pm 1, \frac{2\pi}{\omega} = 2$ с. Отсюда определяем среднее положение грузика $z_0 = 10$ см и амплитуду $A = 5$ см. Значит лампочка будет находиться около всех делений от **5 до 15 см** включительно.

То есть, во-первых, существуют точки, которые освещаются через равные промежутки времени, таких точек у пружинного маятника всего 3: нерастянутое положение, и крайние точки, в которых скорость 0. Крайние точки освещаются с периодичностью равной периоду маятника, а «середина» его движения – точка, в которой пружина находится в нерастянутом положении, а грузик имеет максимальную скорость, освещается дважды за период через время, равное половине периода маятника. Таким образом, кроме крайних точек существует единственная точка, которая освещается за равные промежутки времени и в которой промежуток меньше (1с < 2с), значит деление 10 см – это точка $z = z_0$, а деления 5 и 15 см крайние освещенные точки на линейке, а $T = 2$ с является периодом.

b. Деление 10 см освещено, пока лампочка проходит дистанцию 2 мм в окрестности среднего положения. Скорость лампочки при этом можно считать максимальной, ведь она изменяется незначительно, так как расстояние в 2 мм много меньше амплитуды. Величина скорости определяется амплитудой:

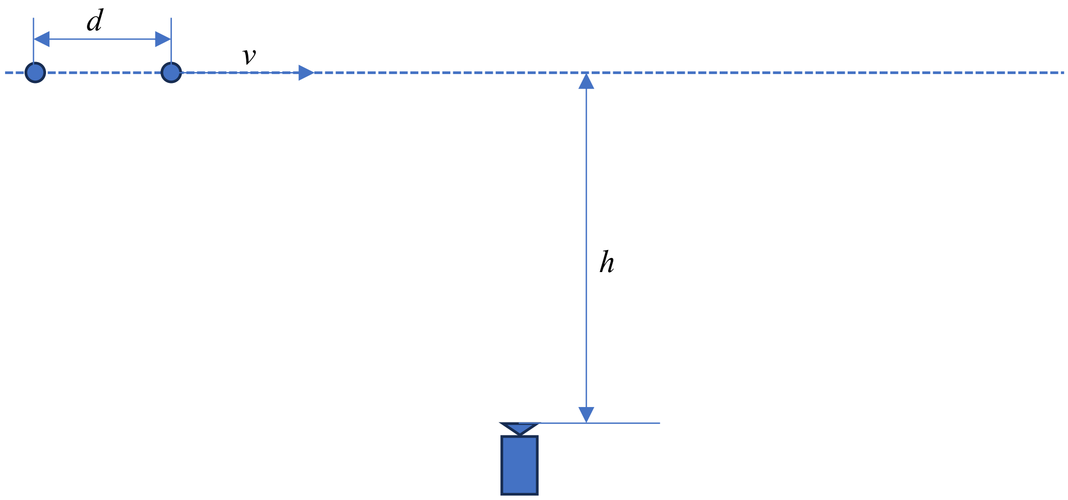
$$V_1 = A\omega = A \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Стало быть, время прохождения заданной дистанции

$$\boldsymbol{\tau \approx \frac{d}{A}\frac{T}{2\pi} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2\pi} = \frac{2}{5\pi} \cdot \frac{1}{10} = 0.04\frac{1}{\pi} \approx 0.0128} \text{ с}$$

Задача 2. Младшие и Старшие.

Два точечных источника света движутся с постоянной скоростью *v* по прямой, проходящей на расстоянии *h* от наблюдателя, который измеряет интенсивность света от этих источников с помощью маленьких одинаковых детекторов, направленных в каждый момент времени точно на соответствующий источник. В начале наблюдения оба источника далеко слева от наблюдателя, в конце – далеко справа. Расстояние между источниками постоянно и равно *d*. Максимальная зафиксированная интенсивность света от второго источника оказалась меньше максимальной зафиксированной интенсивностью света от первого, при этом в течение некоторых моментов времени интенсивность света от второго источника была больше интенсивности от первого. Определите условие, при котором это возможно, а также продолжительность промежутка времени, когда это наблюдалось, если отношение максимальных интенсивностей $\alpha<1$. Интенсивность света в точке обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника.



Решение:

По условию, мгновенные интенсивности полученных сигналов

$$I_1(t) = \frac{I_0}{h^2 + (vt)^2}, \qquad I_2(t) = \frac{\alpha I_0}{h^2 + (vt - d)^2}.$$

Ограничение $I_2(t) > I_1(t)$ эквивалентно неравенству

$$(1-\alpha)v^2t^2 - 2vdt + d^2 + (1-\alpha)h^2 < 0,$$

Полученное слева выражение является квадратным полиномом от t, коэффициент перед главной степенью t^2положительный, значит неравенство выполнено между корнями данной параболы, данное значение дается формулой (как разность корней)

$$\frac{\sqrt{D}}{a}$$

Продолжительность интервала времени, когда это неравенство выполнено

$$\boldsymbol{\Delta t = \frac{2}{v(1-\alpha)}\sqrt{\alpha d^2 - h^2(1-\alpha)^2}}.$$

Описанная в условии ситуация возможна, если расстояние между источниками достаточно велико: $d > \frac{h(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$.

Задача 3. Младшие и Старшие.

Металлические трубы, по которым течет горячая вода, используются для обогрева помещения. В ходе испытаний было замечено, что тепловая мощность, которая уходит от единицы длины трубы пропорциональная радиусу трубы и слабо зависит от температуры жидкости в рабочем диапазоне. Когда по трубе длины 6 м радиуса 1 см прокачивалась вода со скоростью 1 м/с, то на входе ее температура составляла 100°C, а на выходе 90°C.

a. Определите температуру воды на выходе трубы длиной 6 м и радиусом 2 см, если скорость воды также 1м/с и температура на входе также 100°C.

b. Определите температуру воды на выходе из трубы, составленной из двух последовательных сегментов длиной 3 м каждый. Радиусы сегментов 1 см и 2 см, скорость воды в сегменте радиусом 1 см составляет 1м/с. Температура на входе также 100°C.

Решение:

a. Запишем уравнение теплового баланса, которое соотносит разность вошедшей и вышедшей энергии и мощность теплоотвода, для труб радиусами R_1, R_2:

$$c\rho v\Delta t\pi R_1^2(T_0 - T_1) = \alpha R_1 L\Delta t \qquad (1)$$

$$c\rho v\Delta t\pi R_2^2(T_0 - T_2) = \alpha R_2 L\Delta t$$

(Здесь предполагается, что скорость на входе и выходе трубы одинаковая, поэтому поступает и выходит одна и та же масса жидкости, но которая потеряла 10 градусов теплоты только за счет теплообмена со стенками трубы, поэтому используется выражение с теплоемкостью согласно ее определению.) Для плотности, удельной теплоемкости использованы стандартные обозначения, v – скорость жидкости, T_0 – температура на входе в трубу, T_1, T_2 – температуры на выходе. Разделив одно уравнение на другое исключаем α и находим

$$\boldsymbol{T_2 = T_0 - \frac{R_1}{R_2}(T_0 - T_1) = 95^\circ C}.$$

b. В случае составной трубы при переходе из одного сегмента в другой скорость жидкости изменяется так, что масса, проходящая через каждое сечение одинакова:

$$\rho v_1 \Delta t \pi R_1^2 = \rho v_2 \Delta t \pi R_2^2 = M$$

Величина Q также постоянна и называется объемным расходом:

$$v_1 \pi R_1^2 = v_2 \pi R_2^2 = Q$$

Обозначим T_* температуру жидкости в месте сочленения сегментов. Тогда из уравнения теплового баланса

$$c\rho Q \Delta t (T_0 - T_*) = \frac{\alpha R_1 L \Delta t}{2}$$

$$c\rho Q \Delta t (T_* - T_3) = \frac{\alpha R_2 L \Delta t}{2}$$

Используя первое уравнение (1) и учитывая, что первая труба до сочленения имеет такую же скорость, как в (1), получаем, поделив первое уравнение выше, на первое уравнение из (1), что температура на выходе первой трубы будет равна $\boldsymbol{T_* = \frac{T_0+T_1}{2} = 95^\circ C}$.

Используя теперь выражение для $\boldsymbol{T_*}$ и аналогично деля первое уравнение на второе, получаем выражение для $\boldsymbol{T_3}$:

$$\boldsymbol{T_3 = \frac{T_0 + T_1}{2} - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{T_0 - T_1}{2} = 85^\circ C}$$