Олимпиада «Математика реальности» (ОМаР)
29.10.2024

Задача 1

Винни-Пух и Пятачок играют в следующую игру: Винни-Пух бросает **кубик**, на гранях которого написаны соответственно числа $1, 2, \ldots, 6$, и получает выпавшее на нём число баллов, а Пятачок бросает **3 монеты** и подсчитывает **сумму** своих баллов, получая за каждого «орла» по 2 балла, а за каждую «решку» по $\boldsymbol{r}$ **баллов**. Выигрывает тот, у кого полученное в результате число больше.

1. Какова у Пятачка вероятность **выигрыша**:

А) при $\boldsymbol{r = 0}$, если в случае **равенства** баллов Пятачок **выигрывает**;

Б) при $\boldsymbol{r = 1}$, если в случае **равенства** баллов Пятачок **проигрывает**?

2. При каких значениях $\boldsymbol{r \in (0, 1)}$ вероятности выигрыша и проигрыша у Пятачка **совпадают** друг с другом, если случай **равенства** баллов принимается за **ничью** (т.е. никто не выигрывает и не проигрывает)?

Ответ*:* 1.А) $\frac{1}{2}$; **1.Б)** $\frac{7}{12}$; **2.** $r = \frac{1}{3}$.

Решение*.* Рассмотрим каждую из ситуаций, описанных в разных вопросах задачи, отдельно.

1.А. Вероятность выигрыша Пятачка p_+ в этом случае складывается из 4 вариантов результатов, в которых он набирает

$$3 \cdot 2 = 6, \quad 2 \cdot 2 = 4, \quad 1 \cdot 2 = 2 \quad \text{или} \quad 0 \cdot 2 = 0 \text{ баллов},$$

а Винни-Пух при этом набирает не больше. В итоге эта вероятность равна

$$p_+ = \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{0}{6} = \frac{24}{48} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

1.Б. Вероятность выигрыша Пятачка и в этом случае складывается из тех же 4 вариантов результатов, в которых он соответственно набирает

$$6 + 0 = 6, \quad 4 + 1 = 5, \quad 2 + 2 = 4 \quad \text{или} \quad 0 + 3 = 3 \text{ балла},$$

а Винни-Пух набирает строго меньше. В итоге эта вероятность равна

$$p_+ = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{28}{48} = \boldsymbol{\frac{7}{12}}.$$

2. Рассмотрим аналогичные вероятности выигрыша p_+ и проигрыша p_- Пятачка при различных значениях $r \in (0, 1)$.

При $0 < r < \frac{1}{3}$ имеем

$$p_+ = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{0}{6} = \boldsymbol{\frac{23}{48}} < \boldsymbol{\frac{24}{48}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{0}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{6} = p_-.$$

При $r = \frac{1}{3}$ имеем

$$p_+ = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{0}{6} = \boldsymbol{\frac{23}{48}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{0}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} = p_-.$$

При $\frac{1}{3} < r < 1$ имеем

$$p_+ \geq \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{24}{48}} > \boldsymbol{\frac{23}{48}} \geq p_-.$$

Задача 2

На клетчатой бумаге, клетки которой являются квадратами со стороной 1, Незнайка пытается нарисовать от руки окружность. Для этого ему нужно, чтобы окружность проходила через несколько **узлов** сетки (вершин клеток). Найдите наименьший радиус окружности, которая:

1) проходит по меньшей мере через **16** узлов, а её центр **совпадает** с некоторым узлом сетки;

2) проходит по меньшей мере через **8** узлов, а её центр **не обязательно** совпадает с узлом сетки.

Ответ: 1) $\sqrt{65}$; **2)** $\sqrt{2{,}5}$.

Решение. Рассуждение опирается на теорему **Пифагора**.

1. Для того, чтобы окружность с центром в узле сетки проходила через 16 других узлов, квадрат её радиуса должен допускать два разных представления в виде суммы квадратов двух различных натуральных чисел. Наименьшее такое число равно

$$\mathbf{65} = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2.$$

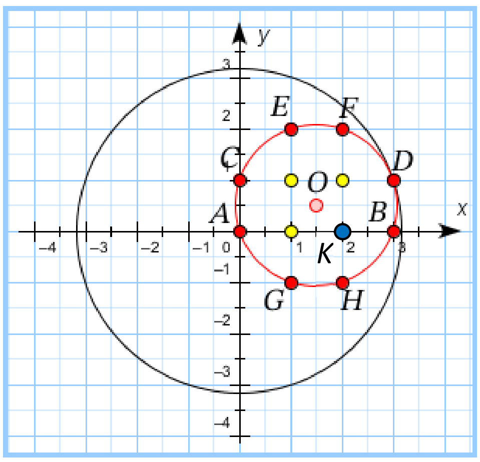
То, что никакое меньшее число не годится, проверяется непосредственным перебором всех пар чисел, суммы квадратов которых **меньше 65**. Все такие суммы можно перечислить, разбив подходящие пары чисел на 5 групп с квадратом меньшего числа, равным 1, 4, 9, 16, 25 соответственно:

$$5, 10, 17, 26, 37, 50;\ \ 13, 20, 29, 40, 53;\ \ 25, 34, 45, 58;\ \ 41, 52;\ \ 61.$$

Как видим, среди этих сумм **равных нет**.

2. Окружность S на координатной плоскости с центром $O(1{,}5; 0{,}5)$ и диаметром $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ проходит через **8 узлов** сетки (см. рис.):

$$A(0;0), B(3;0), C(0;1), D(3;1), E(1;2), F(2;2), G(1;-1) \text{ и } H(2;-1).$$



Никакая окружность **меньшего диаметра** этим свойством уже **не обладает**, что проверяется непосредственным **перебором**. Действительно, если такая окружность S' проходит, для определённости, через точку A, то она лежит внутри круга с центром A и радиусом $AD = \sqrt{10}$, а если она проходит ещё через какой-то узел M, то её центр O' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AM, причём $AO' < AO = \sqrt{2{,}5}$ (но тогда из соображений симметрии точку M можно считать совпадающей с одной из 6 точек B, C, E, F, G или $K(0;2)$, а центр O' окружности S'— лежащим в круге, ограниченном окружностью S), однако всякая такая окружность S' проходит менее, чем через 8 узлов.

Задача 3[1]

Дана фотография некоторой части круглой скамейки, сиденье которой имеет форму кольца и составлено из одинаковых дощечек, имеющих форму равнобедренной трапеции. Любая фотография подчиняется **законам перспективы**: прямые на ней изображаются **прямыми**, а несколько параллельных друг другу прямых — прямыми, **пересекающимися** в общей точке (на так называемой «линии горизонта», за исключением случая, когда они сами параллельны «линии горизонта»). Цель настоящей задачи состоит в том, чтобы, пользуясь этими законами и проводя построения прямо на листе с фотографией, определить **количество всех дощечек**, составляющих данное сиденье.

1. Постройте на рисунке изображения:

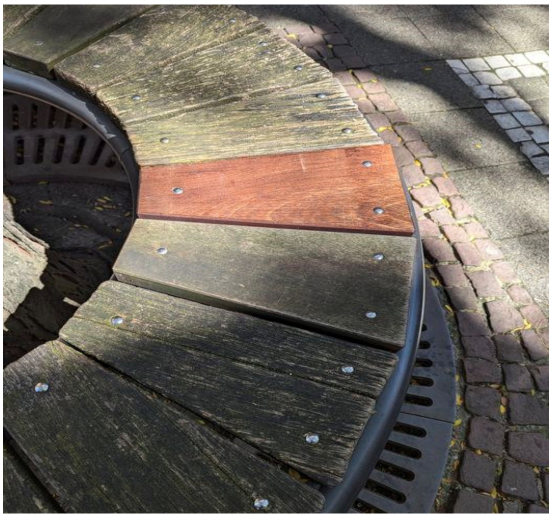
А) прямой, проходящей через **середины** коротких сторон одной дощечки;

Б) какой-нибудь прямой, **параллельной** двум этим коротким сторонам;

В) каких-нибудь двух **перпендикулярных** прямых, лежащих в плоскости скамейки и проходящих через её центр.

2. Определите число всех дощечек скамейки, если известно, что оно **кратно четырём**.

3. Можно ли определить число всех дощечек по изображениям **только двух** соседних дощечек, если заранее об этом числе ничего не известно?



Ответ: 1.А)–В) см. рис. 2; **2.** 24; **3.** Да.

Решение. Напомним известную **теорему**: середины оснований трапеции $XYUV$ лежат на прямой m, соединяющей точку P пересечения ее диагоналей и точку O пересечения продолжений боковых сторон (рис. 1). В случае же равнобедренной трапеции прямая m является еще и осью симметрии всей фигуры.

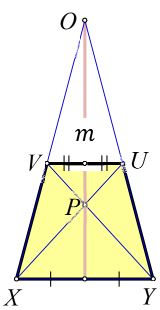


Рис. 1

[1] Главный вопрос задачи и фото предложены Филиппом Погореловым.

1. Решение показано на рис. 2, где $ABCD$ и $BEFC$ — изображения на фото двух соседних дощечек, а отрезки AB, CD и BE, FC изображают основания соответствующих трапеций.

А. Из приведенной выше теоремы о трапеции следует **ответ: прямая *a*** (на рис. 2).

Б. Любая прямая, параллельная основаниям трапеции-дощечки, изображаемым отрезками AB и CD, на фото проходит через точку K пересечения прямых AB и CD. Отсюда имеем такой, например, **ответ: прямая *OK*** (на рис. 2).

В. Центр скамейки изображается точкой O пересечения прямых AD и BC. Так как все прямые, перпендикулярные к оси симметрии равнобедренной трапеции, параллельны её основаниям, то получаем такой, например, **ответ: прямые *a* и *OK*** (рис. 2).

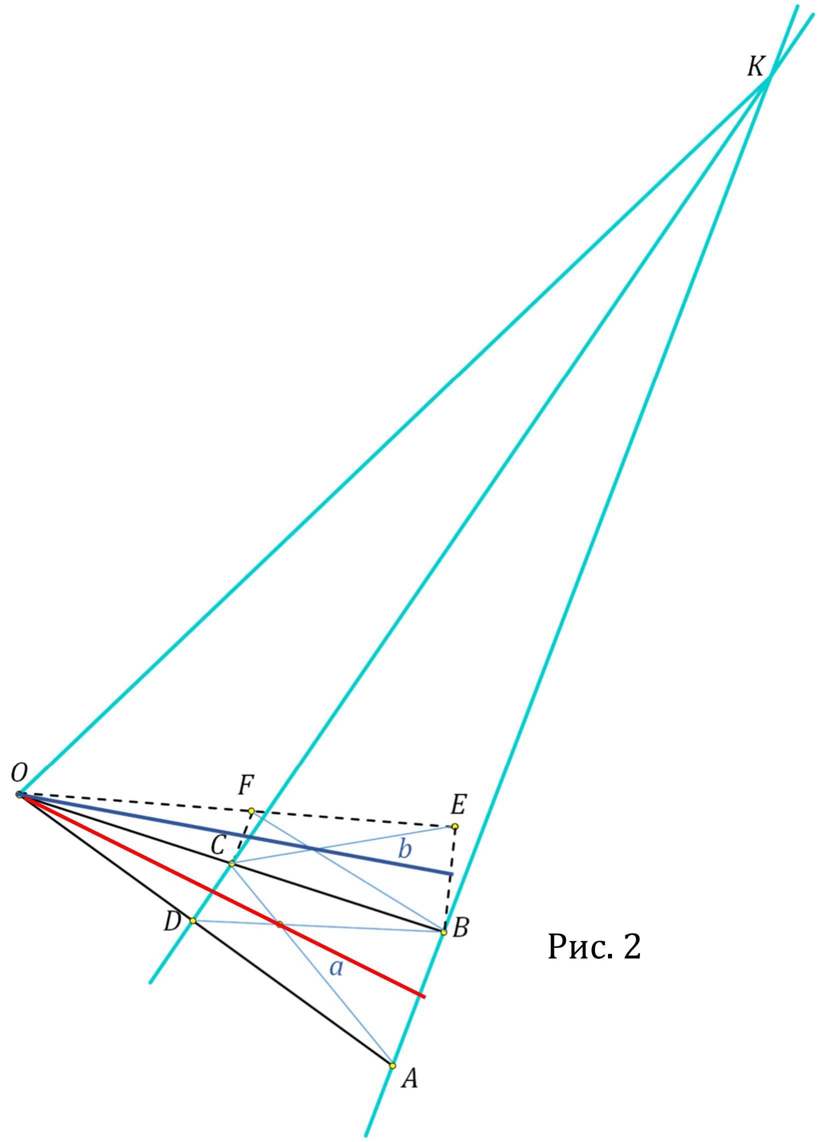


Рис. 2

2. Если число дощечек равно $\boldsymbol{4n}$, то угол между боковыми сторонами дощечки равен $\alpha = 90°/n$. Если провести на фото прямые a и OK (образующие угол в 90° на скамейке), то внутри угла между ними окажется 5 полных дощечек и 2 их неполные части по краям угла. Поэтому $5\alpha < 90° < 7\alpha$, а значит, $90° = 6\alpha$ и $\boldsymbol{n = 6}$.

3. **Построение** на рис. 1 позволяет по данной прямой m и точкам X и Y, симметричным относительно нее, с помощью **одной лишь линейки** построить точку U, **симметричную произвольной** точке V относительно m: строим точки O и P, в которых прямая m пересекается с прямыми XV и YV, тогда U — это точка пересечения прямых XP и YO (если же прямая m параллельна XV или YV, то построение несколько сложнее, но в данной задаче этот случай не реализуется). На фото все прямые остаются прямыми, поэтому предложенное построение остается в силе.

Пусть теперь на фото видны дощечки $ABCD$ и $CDEF$ (рис. 2). Построим ось симметрии b на фото 2-й дощечки и, используя симметричные относительно прямой b точки B и E, достраиваем недостающие вершины 3-й дощечки, **симметричные** точкам A и D относительно прямой b. Затем аналогично строим 4-ю дощечку, 5-ю **и т.д.**, пока кольцо не замкнется. Процесс можно ускорить: достаточно пройти **полкруга** (дойдя до прямой a), а также можно **перепрыгивать** через дощечки (если, к примеру, отразить 1-ю дощечку относительно оси симметрии 3-й, то сразу получится 5-я дощечка).

Заметим, что нам даже не нужна вся 2-я дощечка: достаточно, чтобы на фото поместилась, в дополнение к B и C, только ещё одна её вершина, например, E. Действительно, поскольку нам даны точки E и A, симметричные относительно BC, вершину F можно построить, как точку, симметричную D относительно той же прямой BC.

4. Домашнее задание: можно ли определить число всех дощечек на скамейке по изображению **только одной** дощечки?