XXIV КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

The 24th KOLMOGOROV READINGS

ADVANCED EDUCATION AND SCIENCE CENTER

Proceedings of
the 24th International Scientific Conference of students
Kolmogorov readings
May 2-5, 2024

MATHEMATICS

Moscow
2024

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
(факультет) – школа-интернат имени А.Н. Колмогорова
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

Материалы
XXIV Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»
2-5 мая 2024

МАТЕМАТИКА

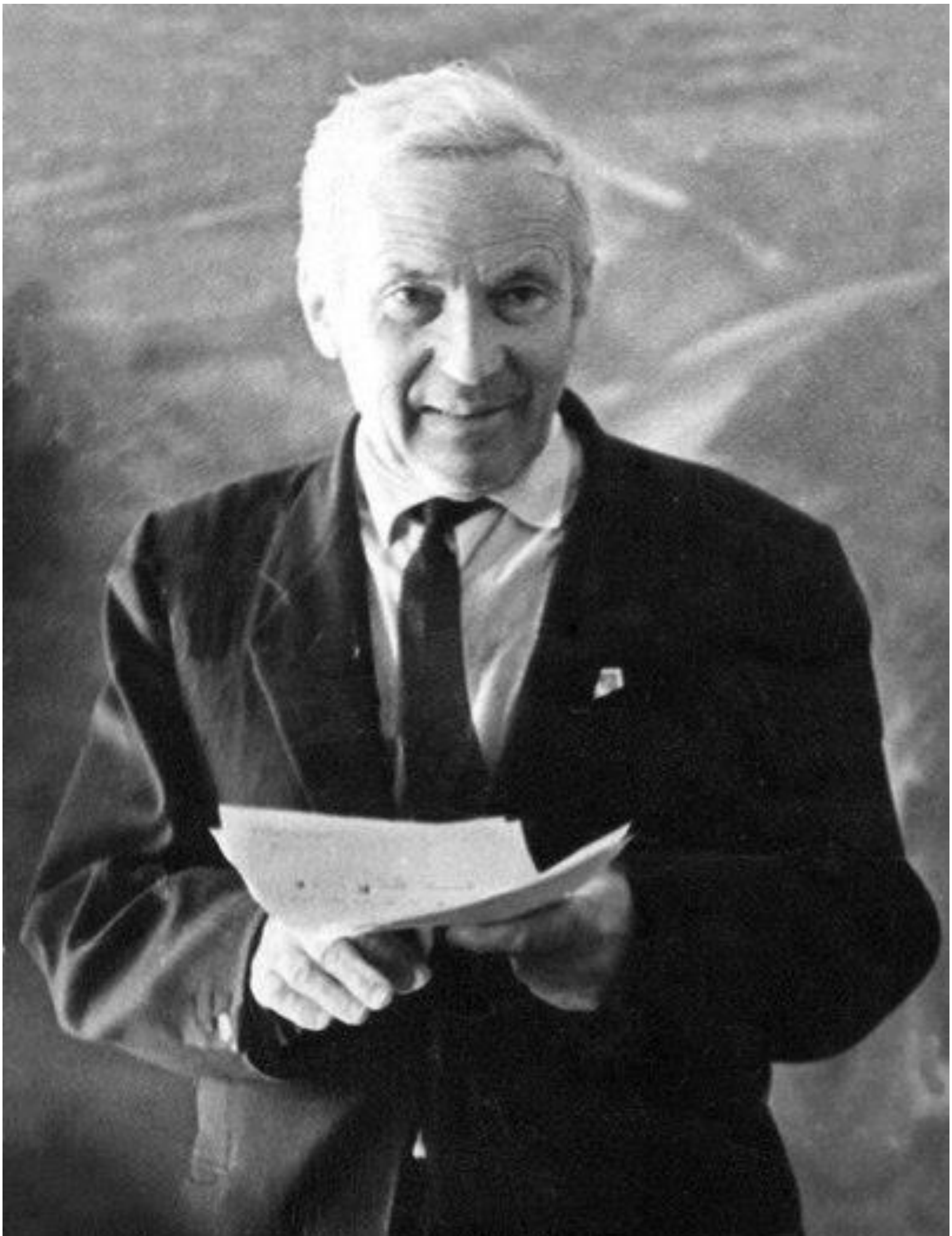
Москва
2024

Председатель организационного комитета
XXIV Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»:
К.В. Семенов

Редакционный совет сборника тезисов «Математика»:
И.Н. Сергеев (председатель), В.Н. Дубровский, Ю.В. Курышова

Материалы
XXIV Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»

В настоящий сборник вошли тезисы приглашённых докладчиков
XXIV Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения» по секции
«Математика»



Как в спорте не сразу ставят рекорды, так и подготовка к настоящему научному творчеству требует тренировки.

А.Н. Колмогоров

Содержание

ТОЧНОСТЬ РАСЧЕТОВ НАХОЖДЕНИЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ УРОЖАЙНОСТИ ЗЕРНОВЫХ КУЛЬТУР В КАЗАХСТАНЕ

Бахит Алихан Муратулы
10 класс, Назарбаев Интеллектуальная школа химико-биологического направления, г. Павлодар, Республика Казахстан

Касымбаева Акжан Ермуратовна
9 класс, Назарбаев Интеллектуальная школа химико-биологического направления, г. Павлодар, Республика Казахстан

Научный руководитель: учитель математики Назарбаев Интеллектуальной школы химико-биологического направления г. Павлодара магистр естественных наук Майя Каирбаевна Оспанова

Данная тема выбрана с целью на примере урожайности зерновых культур Казахстана показать, как влияет выбор меры центральной тенденции при подсчёте среднего значения.

В Казахстане основной зерновой культурой, на которую приходится большая часть производства, является пшеница, составляющая 83% от общего производства зерновых культур в период 2012–2024 гг. По данной причине в качестве примера злаковых культур определили пшеницу.

Проводя расчёты для нахождения среднего арифметического и медианы производства пшеницы в этот период на основе данных с официального сайта [2] получаем разницу между средним арифметическим и медианой в 735753 т. Закон распределения величины наглядно показывает существенную разницу между средним арифметическим и медианой, а также расположением по отношению ко всем данным [3], [4].

В качестве эксперимента, уменьшался наименьший и увеличивался наибольший показатели. При этом среднее арифметическое менялось в зависимости от изменения минимального и максимального значения, а медиана оставалась неизменной для основного набора данных.

Таким образом, в ходе исследования получено, что если в наборе данных есть резко выделяющиеся значения, то медиана показывает более точный результат, чем среднее арифметическое: медиана неизменна по отношению к основному набору данных. Её можно применять и при рассмотрении численности населения, заработной платы, производства различной продукции, тогда как среднее арифметическое применимо лишь к набору данных, в которых нет выбросов.

Список использованных источников

[1] Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика. М.: МЦНМО: АО «Московские учебники», 2004.

[2] https://stat.gov.kz/

[3] Шахмейстер А.Х. Комбинаторика. Статистика. Вероятность. СПб., 2012.

[4] Володин И.Н. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Казань, 2006.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ В МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Ефремов Святослав Алексеевич, Кустов Вадим Евгеньевич

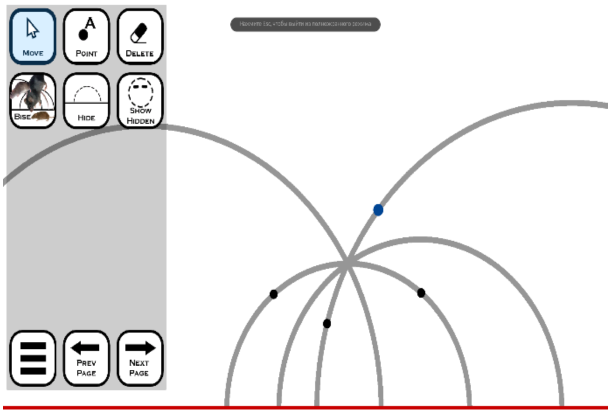
9 класс, лицей № 533 (ЮМШ), г. Санкт-Петербург, Россия

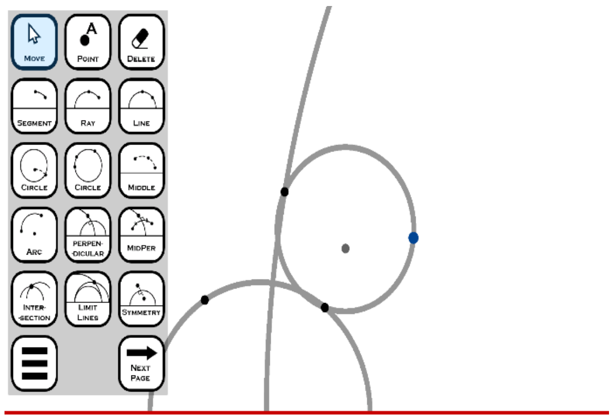
Научный руководитель: студент факультет математики и компьютерных наук СпбГУ Владимир Евгеньевич Зверев

В настоящий момент существует много программ визуализации построений в Евклидовой геометрии. Одной из самых известных является GeoGebra [1]. Целью работы являлось создание аналогичной программы для визуализации геометрических построений в геометрии Лобачевского — в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

Проект реализован [2] на языке C# на платформе Unity. В программе доступно построение:

- точки, прямой, луча;
- отрезка по двум точкам;
- окружности по центру и радиусу или по трём точкам на ней;
- середины отрезка (круга), дуги по центру и двум точкам;
- серединного перпендикуляра;
- высоты, опущенной из точки на прямую;
- биссектрисы угла, образованного двумя прямыми;
- точки, симметрично относительно прямой.





Кроме того, пользователь имеет возможность:

- двигать камеру на WASD;
- изменять масштаб;
- прятать и показывать обратно любые

объекты;

- строить точки пересечения двух любых объектов;
- прямые, параллельные данной и проходящие через данную точку.

Реализована возможность двигать незакрепленную точку (не созданную другими функциями), в этом случае чертёж перестраивается под изменения. Если же удалить любой объект, то все объекты, которые строились по нему, тоже будут удалены.

Функции программы вызываются при помощи пиктограмм, расположенных в левой части рабочего поля с последующим заданием нужных параметров (выделение точек и прямых).

В дальнейшем предполагается как улучшить интерфейс, добавив откат действий, адаптировав для работы с мобильного устройства, предусмотрев сохранение проекта, так и расширить перечень геометрических действий, например, реализовав работу с углами.

Список использованных источников

[1] https://www.geogebra.org/

[2] https://svyatsvyatsvyat123.github.io/PuancoreModelGeometry/

[3] https://docs.unity3d.com/Manual/index.html

[4] https://techlibrary.ru/b1/2h1t1a1o1a1s2g1o_2t.2z._2k1f1p1n1f1t1r1j2g_2t1p1b1a1y1f1c1s1l1p1d1p._2014.pdf

[5] https://kpfu.ru/docs/F17092856/SosovGeomLob1.pdf

[6] https://techlibrary.ru/b1/2x1r1a1s1p1m1p1c_2j.2j._2k1f1p1n1f1t1r1j2g_2t1p1b1a1y1f1c1s1l1p1d1p._2014.pdf

[7] https://liaign.ucoz.ru/magistratura/neevklidovy_geometrii_mag_16_17.pdf

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА МЕЖДУ ГРАФАМИ И ЕГО КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Калистратов Даниил Евгеньевич

11 класс, МАОУ Лицей № 38, г. Нижний Новгород, Россия

Научный руководитель: ведущий научный сотрудник НИУ ВШЭ г. Нижнего Новгорода профессор Дмитрий Сергеевич Малышев

Цель исследования — разработка принципиально нового полиномиального метода определения изоморфности графов, который позволит численно решать любые востребованные (включая научные исследования) примеры данной задачи и будет работать быстрее, чем какие-либо другие известные алгоритмы [1–5] для этой задачи.

Изоморфизм графов 1 и 2 — это такая биекция между множествами вершин и рёбер данных графов, что две вершины в графе 1 смежны тогда и только тогда, когда они смежны в графе 2, а ребра в графе 1 имеют общую вершину тогда и только тогда, когда они имеют общую вершину в графе 2.

Практическая значимость работы заключается в том, что задача об изоморфизме графов является весьма интересной переборной задачей, имеющей многообразные применения во многих естественных науках — химии, физике, биологии. Так, необходимость определения изоморфности или неизоморфности графов возникает при решении задач в математической (компьютерной) химии, при проектировании электронных схем (различных представлений электронной схемы), оптимизации компьютерных программ [1], в литературоведении при сравнении сюжетов произведений.

Разработан принципиально новый алгоритм для определения изоморфности графов. Введены понятия элементного спектра и элементного мультиспектра матрицы как множества и мультимножества значений её элементов соответственно, а также понятие замены элементного спектра на случайный. Создан новый тип преобразования квадратной матрицы, понимаемого как подвергание систем строк и столбцов матрицы одной и той же перестановке. Выполнена практическая проверка предложенного алгоритма для решения переборной задачи на репрезентативной выборке тестовых примеров и подтверждена работоспособность алгоритма. Написана программа на языке Python, реализующая данный алгоритм. Путем тестирования программы подтверждено, что предложенный алгоритм способен установить изоморфизм двух заданных графов.

Список использованных источников

[1] Карелин В.П. Задача распознавания изоморфизма графов. Прикладное значение и подходы к решению // Вестник Таганрогского института управления и экономики, 2015, № 1, с. 102–106.

[2] Курапов С.В., Давидовский М.В. Вычислительные методы определения инвариантов графа // International Journal of Open Information Technologies, 2021, v. 9, № 2, p. 1–8.

[3] https://m.habr.com/ru/post/273231/

[4] Погожев С.В., Хитров Г.М. О проблеме изоморфизма графов и об одном матричном алгоритме ее решения // Вестник СПбГУ. Серия 10, 2008, вып. 4, с. 80–83.

[5] Погребной В.К. Решение задачи определения изоморфизма графов, представленных атрибутными матрицами // Известия Томского политехнического университета. 2012, т. 321, № 5, с. 52–56.

ВВЕДЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Коломина Ирина Дмитриевна

10 класс, МАОУ Лицей № 38, г. Нижний Новгород, Россия

Научный руководитель: учитель математики МАОУ Лицей № 38 г. Нижнего Новгорода Ирина Сергеевна Быстрицкая

В работе вводятся термины, которые могут значительно упростить решение многих планиметрических и стереометрических задач, а также доказать несколько теорем, что поспособствует лучшему пониманию геометрии, как науки, и расширению области знаний в решении самых различных задач.

Цель работы — для решения геометрических задач применить некоторые физические понятия. Про каждое из вводимых понятий приводится теоретический материал и доказываются необходимые свойства.

В каждой главе решён ряд планиметрических и стереометрических задач разного уровня сложности. Также решён ряд задач на доказательство, каждая из которых является либо теоремой (Чевы, Менелая, Стюарта и Фейербаха), либо полезным свойством в геометрии. Представим формулировки некоторых из них.

Задача 1. Дан треугольник ABC. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC, а также прямая, проходящая через середины сторон AB и BC, и биссектриса угла ACB (рис.1) пересекаются в одной точке.

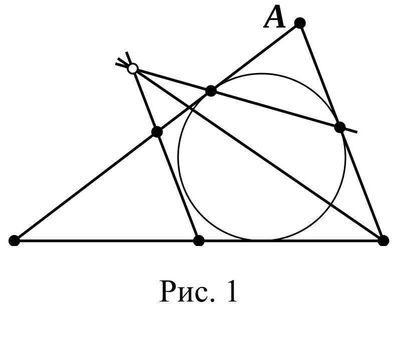


Рис. 1

Подобные задачи решаются методом «расщепления масс»: у материальных точек выбирается такая масса, которую можно разделить на несколько других масс, чтобы использовать их при перегруппировке разных систем материальных точек, затем записываются условия попадания точки на прямую с помощью определения и свойств центра масс, в результате чего задача сводится к доказательству тождества.

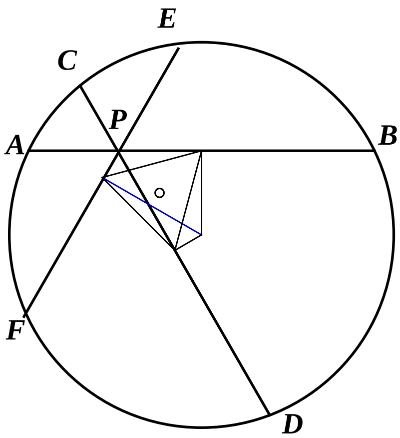


Рис. 2

Задача 2. Через точку P внутри круга радиуса R проведены три хорды AB, CD и EF так, что угол между любыми двумя из них равен $60°$ (рис. 2). Найдите сумму

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 + PE^2 + PF^2.$$

Идея решения этой задачи состоит в том, чтобы задать центр масс всех 6 данных материальных точек, лежащих на окружности, и после нескольких перегруппировок с помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера и момента инерции вычислить искомую сумму.

Основные выводы и перспективы развития работы:

- с помощью введения некоторых физических терминов можно решать геометрические задачи;
- введённые термины можно использовать в доказательстве теорем;
- многие свойства и теоремы из раздела о моменте инерции можно активно применять при решении задач с помощью барицентров;
- с помощью барицентрических координат можно структурировать решение стереометрических задач.

Список использованных источников

[1] Балк М.Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести // Библиотека математического кружка. 1959, вып. 9.

[2] Успенский В.А. Некоторые приложения механики к математике // Популярные лекции по математике, 1958, вып. 27.

[3] Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Т. 3. М.: МЦНМО, 2009.

[4] Эвнин А.Ю. 150 красивых задач для будущих математиков. М.: КРАС АНД, 2014.

ОБОБЩЁННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Кюсева Яна Александровна

11 класс, СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Научный руководитель: научный сотрудник СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова Геннадий Иосифович Сыркин.

В математике используются различные системы счисления для представления натуральных или действительных чисел — такие, как например, позиционная система счисления с натуральным основанием $p > 1$ для действительных чисел (в частности, десятичная и двоичная системы счисления) [1], [2] или факториальная система счисления (для натуральных чисел) [1].

В работе предлагается обобщённая система счисления для натуральных чисел, задаваемая произвольной последовательностью $q = (q(0), q(1), \dots)$ её натуральных оснований (больших 1) в разрядах $0,1, \dots$ соответственно.

Определение 1. Отображение q множества $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ во множество $\mathbb{Z}_{\geq 2} = \{2, 3, 4, \dots\}$ будем называть последовательностью *оснований* (*обобщённой*) *системы счисления*.

Определение 2. Пусть $q: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 2}$ есть произвольная последовательность оснований системы счисления. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ конечное множество $\{0, 1, \dots, q(n) - 1\}$ из первых $q(n)$ неотрицательных целых чисел будем называть множеством *цифр в n-м разряде*, а *максимальную цифру* в n-м разряде будем также обозначать $\bar{q}(n) = q(n) - 1$. Кроме того, определим по индукции последовательность $w: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ *весов*: $w(0) = 1$ и

$$w(n) = w(n-1) \cdot q(n-1) \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

а также обозначим $\bar{w}(n) = w(n) - 1$.

Теорема 1. Если $q: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 2}$ есть последовательность оснований обобщённой системы счисления и $w: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ есть соответствующая ей последовательность весов, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $y \in \{0, 1, \dots, \bar{w}(n)\}$ существует единственный набор $\big(a(0), a(1), \dots, a(n-1)\big)$ цифр в соответствующих разрядах $0,1, \dots, n-1$, удовлетворяющий равенству

$$y = a(0) \cdot w(0) + a(1) \cdot w(1) + \dots + a(n-1) \cdot w(n-1).$$

Следствие. Последнее равенство при данном $n \in \mathbb{N}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами чисел $y \in \{0,1, \dots, \bar{w}(n)\}$ и всевозможных наборов $\big(a(0), a(1), \dots, a(n-1)\big)$ цифр в первых n разрядах:

$$0 \leq a(0) \leq \bar{q}(0), \quad 0 \leq a(1) \leq \bar{q}(1), \dots, \quad 0 \leq a(n-1) \leq \bar{q}(n-1).$$

Рассмотрим частные случаи:

- если $q(n) = 10$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то $\bar{q}(n) = 9$, $w(n) = 10^n$, а q есть последовательность оснований десятичной системы счисления:
$$q = (10, 10, \dots),\ \ \bar{q} = (9, 9, \dots),\ \ w = (10^0, 10^1, \dots);$$
- если $q(n) = 2$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то $\bar{q}(n) = 1$, $w(n) = 2^n$, а q есть последовательность оснований двоичной системы счисления:
$$q = (2, 2, \dots),\ \ \bar{q} = (1, 1, \dots),\ \ w = (2^0, 2^1, \dots);$$
- если $q(n) = n + 2$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то $\bar{q}(n) = n + 1$, $w(n) = (n + 1)!$, а q есть последовательность оснований факториальной системы счисления:
$$q = (2, 3, 4, \dots),\ \ \bar{q} = (1, 2, 3, \dots),\ \ w = (1!, 2!, 3!, \dots).$$

Теорема 2. Если $q: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 2}$ есть последовательность оснований обобщённой системы счисления и $w: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ есть соответствующая ей последовательность весов, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства
$$w(n) = w(0) \cdot q(0) \cdot \mathrm{q}(1) \cdot \dots \cdot q(n-1) = \ q(0) \cdot \mathrm{q}(1) \cdot \dots \cdot q(n-1)q(n-1),$$
дающие выражение последовательности весов w через последовательность оснований q обобщённой системы счисления.

Теорема 3. Если $q: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 2}$ есть последовательность оснований обобщённой системы счисления и $w: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ есть соответствующая ей последовательность весов, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство
$$w(n) = \bar{q}(0) \cdot w(0) + \bar{q}(1) \cdot w(1) + \cdots + \bar{q}(n-1) \cdot w(n-1) + 1,$$
дающие рекуррентное выражение последовательности весов w через последовательность оснований q обобщённой системы счисления.

Введённая в работе обобщённая система счисления не содержит в качестве частного случая фибоначчиеву систему счисления [1], а также систему счисления остаточных классов, основанную на китайской теореме об остатках.

Список использованных источников

[1] Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2009.

[2] Гашков С.Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. М.: МЦНМО, 2006.

НОВЫЕ СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТИ И ГИПЕРБОЛЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПОЛЯРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Медведев Степан Александрович

10 класс, СУНЦ УрФУ имени Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия

Научный руководитель: учитель математики СУНЦ УрФУ имени Б.Н. Ельцина Антон Вячеславович Шерстобитов

Изучение кривых второго порядка началось ещё в древности. Наибольший вклад в их изучение внёс Аполлоний, создавший множество посвящённых им трудов. Существует немало методов, с помощью которых можно изучать кривые второго порядка: один из них — метод *полярного преобразования* [1].

Определение. Пусть на проективной плоскости фиксирована окружность радиусом r с центром O. Для каждой точки X на луче OX строим такую точку X', что $OX \cdot OX' = r^2$, а через точку X' проведем прямую x, перпендикулярную OX'. Прямая x называется *полярой* точки X, а точка X называется *полюсом* прямой x. Соответствие $X \leftrightarrow x$ между точками и прямыми является взаимно-однозначным — оно и называется *полярным преобразованием*.

Окружность при полярном преобразовании переходит в конику с фокусом O. У гиперболы есть немало интересных свойств [2], в которых важную роль играют её основные элементы (асимптоты, фокусы, оси и др.). Ниже изучается, во что переходят основные элементы гиперболы при полярном преобразовании, а также свойства кривой. Получены несколько новых теорем с помощью полярного преобразования.

Теорема 1. Пусть из внешней точки O к окружности s с центром N проведены касательные, которые касаются этой окружности в точках V и U, причём $VU \cap ON = G$, а f_2 — серединный перпендикуляр к OG. Тогда если b — касательная к s в точке $M \in s$ и $A = f_2 \cap b$, то треугольник AOB равнобедренный.

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 — фокусы гиперболы s, а n — директриса, соответствующая фокусу F_1. Тогда если касательная m к s проходит через точку $B \in s$ и $m \cap n = D$, то m — биссектриса угла F_1BF_2 и $\angle DF_1B = 90°$.

Теорема 3. Пусть F_1 и F_2 — фокусы гиперболы s, k_1 и k_2 — касательные к ней в её вершинах, а v и u — её асимптоты. Тогда если касательная b к s, пересекает прямые u, v, k_1, k_2 в точках A_1, A_2, M_1, M_2 соответственно, то лучи F_1M_1 и F_1M_2 — биссектрисы угла $\angle A_2F_1A_1$.

Теорема 4. Пусть из внешней точки O к окружности s с центром N проведены касательные, которые касаются этой окружности в точках V и U, причём $VU \cap ON = G$, $ON \cap s = K, L$, а f_2 — серединный перпендикуляр OG.

Тогда если $B \in s$, $BU \cap f_2 = C_1$, $BV \cap f_2 = C_2$, $BL \cap f_2 = Q_2$ и $BK \cap f_2 = Q_1$, то прямые OQ_2 и OQ_1 — биссектрисы углов между прямыми OC_1 и OC_2.

Теорема 5. Пусть F_1 и F_2 — фокусы гиперболы s, а n — директриса, соответствующая фокусу F_1, а v и u — её асимптоты. Тогда если a и b — касательные к ней, причём $a \cap b = C \in n$, $a \cap u = L_1$, $b \cap u = L_2$, $a \cap v = M_1$, $b \cap v = M_2$, то $\angle L_2F_1L_1 = \angle M_2F_1M_1 = 90°$.

Список использованных источников

[1] Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. Т. 4. М., 1963.

[2] Акопян А.В., Заславский А.А., Геометрические свойства кривых второго поярдка. М.: МЦНМО, 2007 г.

УМНАЯ ФАЛЬШИВАЯ МОНЕТА В ЗАДАЧАХ НА ВЗВЕШИВАНИЕ

Одегов Михаил Андреевич
9 класс, ГБОУ лицей № 533 (ЮМШ), Санкт-Петербург, Россия

Научный руководитель: главный математик ООО «Эм-Лаб»
Константин Александрович Кноп

В олимпиадной математике распространены задачи, в которых среди нескольких неразличимых по виду монет есть одна (*фальшивая*), отличающаяся по весу, а все остальные (*настоящие*) весят одинаково. В этих задачах требуется за несколько взвешиваний однозначно определить фальшивую монету при помощи чашечных весов без гирь (см. [1]), причем, как правило, фальшивая монета не меняет своих свойств. Но в данной работе рассмотрены вариации таких задач, где состояние фальшивой монеты меняется по ходу взвешиваний.

В работе рассмотрены взвешивания *умной* фальшивой монеты, меняющей свои состояния в зависимости от чётности её взвешиваний: она оказывается легче настоящей при нечётном выкладывании её на весы и равна настоящей при чётном выкладывании, или наоборот. Целью является определение максимального количества монет, из которых за данное число n взвешиваний можно однозначно определить умную фальшивую монету.

Теорема 1. Если поведение умной фальшивой монеты заранее известно, то максимальное количество монет, из которых за n взвешиваний можно определить умную фальшивую монету, равно либо $(2^{n+2}+(-1)^{n+1})/3$ — если она легче настоящей при нечётном выкладывании её на весы и равна настоящей при чётном, либо $(2^{n+1}+(-1)^{n})/3$ — если наоборот.

Теорема 2. Если поведение умной фальшивой монеты заранее неизвестно, то максимальное количество монет, из которых за n взвешиваний можно определить умную фальшивую монету, равно $(2^{n+1}+(-1)^{n})/3$.

Список использованных источников

[1] Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. М.: МЦНМО, 2010.

КРУГИ, ШАРЫ И ПРОЧИЕ ФИГУРЫ

Осиюк Вадим Васильевич

11 класс, ГУО СШ № 8, г. Кобрин, Республика Беларусь

Научный руководитель: учитель математики высшей категории ГУО СШ № 8 г. Кобрина Валерий Николаевич Калинчук

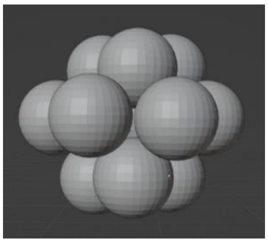
Работа относится к разделу комбинаторной геометрии, изучающей экстремальные геометрические задачи, связанные с отысканием «самых лучших» (или хотя бы «достаточно хороших») расположений конечного числа точек или фигур. Первая часть работы посвящена истокам комбинаторной геометрии, а основная часть работы — это решение задач, связанных с расположением правильных многогранников в пространстве.

О важности решения задач данного направления свидетельствует тот факт, что великие математики решали задачу о 13 шарах в течение нескольких веков, начиная с Иогана Кеплера (1611 г.), Исаака Ньютона и заканчивая Джоном Личем, окончательно закрывшим данный вопрос в 1956 г.

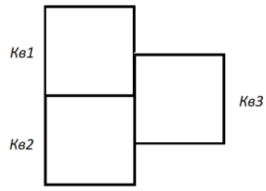
Однако казалось бы тривиальная задача о полном закрытии шара аналогичными шарами от стороннего наблюдателя до сих пор не имеет точного решения: в ней дана лишь оценка необходимого количества шаров.

В ходе работы изучены следующие вопросы (в скобках указаны ответы).

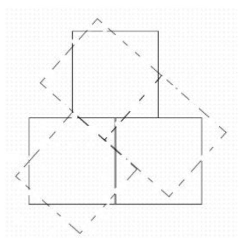
1. Наибольшее число кругов, которые можно расположить вокруг одного такого же круга, согласно условию задачи (6 кругов).
2. Наибольшее число материальных шаров, которые можно приложить к такому же шару так, чтобы все они своей поверхностью соприкасались с поверхностью такого же шара, не пересекая его (12 шаров).

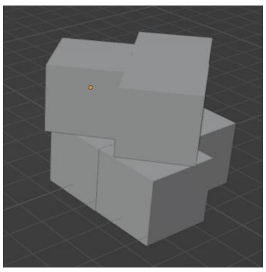


3. Число шаров, необходимое для полного закрытия такого же шара (от 24 до 42 включительно).
4. Наибольшее число квадратов, которые можно приложить к такому же квадрату (8 квадратов).



5. Наибольшее число квадратов, которые можно расположить на плоскости так, чтобы каждые два из них соприкасались по некоторому участку границы, причём соприкосновение их лишь своими вершинами здесь не учитывается (3 квадрата).

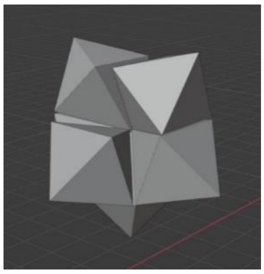




6. Наибольшее число кубов, которые можно расположить в пространстве

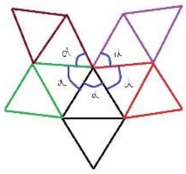
так, чтобы каждые два из них соприкасались по некоторому плоскому участку границы (6 кубов).

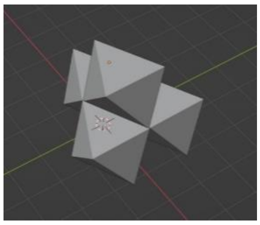
7. Наименьшее число кубов, которыми можно полностью закрыть такой же центральный куб (6 кубов).



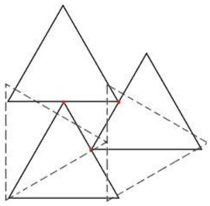
8. Наибольшее число октаэдров, которые можно расположить в пространстве так, чтобы каждые два из них касались лишь рёбрами (4 октаэдра).

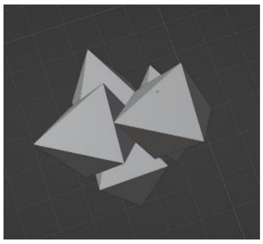
9. Наибольшее число октаэдров, которые можно расположить в пространстве так, чтобы у всех них была одна общая вершина (7 октаэдров).





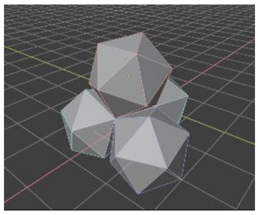
10. Наибольшее число октаэдров, которые можно расположить в пространстве так, чтобы каждые два из них касались только гранями (5 октаэдров).



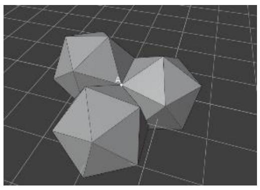


11. Наибольшее число икосаэдров, которые можно расположить в пространстве так, чтобы каждые два из них касались друг друга только ребром, не перекрывая друг друга (4 икосаэдра).

12. Наибольшее число икосаэдров, которые можно расположить в пространстве так, чтобы каждые два из них касались друг друга по некоторому участку грани, не перекрывая друг друга (3 икосаэдра).



13. Наибольшее число икосаэдров, которые можно расположить в пространстве так, чтобы все они имели общую вершину, не пересекая друг друга (4 икосаэдра).



Наиболее значимые результаты получены в пунктах 6–13, причём в пунктах 5–13 результаты получены автором самостоятельно.

Список использованных источников

[1] Яглом И. М. Проблемы тринадцати шаров. М.: Ленанд, 2018.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ «GEOGEBRA» ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАНИЯ № 18 ИЗ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ

Суркова Ангелина Андреевна

11 класс, МБОУ СОШ № 48 с УИОП, Приволжский р-н, г. Казань, Россия

Научный руководитель: учитель математики МБОУ СОШ № 48
Расима Завдатовна Аюпова

В работе сравнивается несколько математических программ, используемых при решении задач с параметрами: GeoGebra, Desmos и MathCad. Лучшей из них оказалась GeoGebra — ведь с помощью неё происходит оживление математики и, следовательно, развитие интереса к этому предмету у школьников. Программа совершенствует учебный процесс, делая учебные материалы интерактивными и подвижными. Её можно осваивать с 3–4 класса, так как она проста и переведена на русский язык. Также GeoGebra бесплатна, доступна для скачивания во всех популярных операционных системах и имеет веб-версию.

Изучаются разные виды уравнений, неравенств, свойства их графиков. Приведём пример.

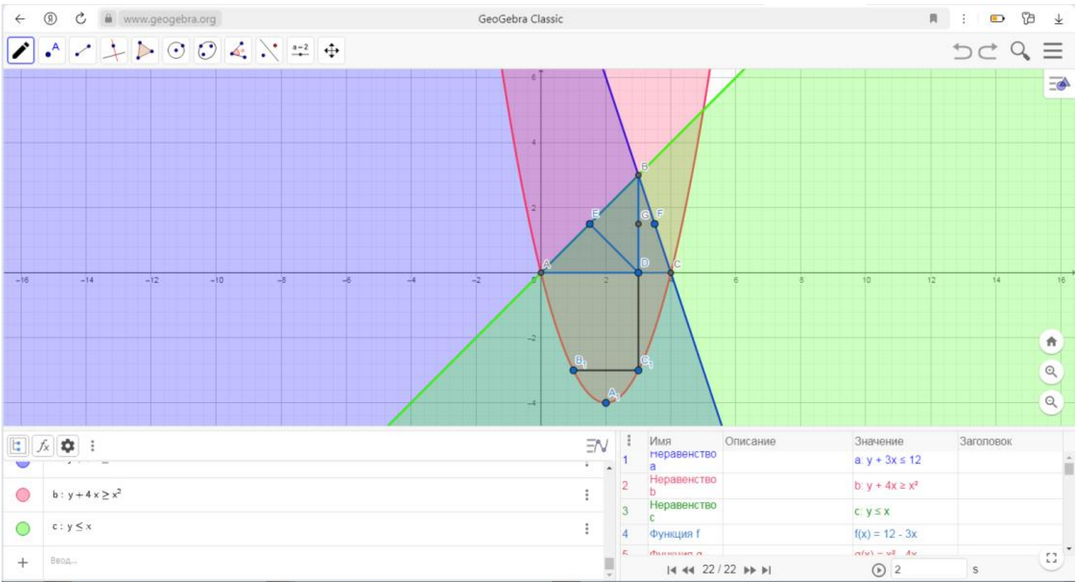
Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a + 3x \leq 12 \\ a + 4x \geq x^2 \\ a \leq x \end{cases}$$

является отрезок длиной 2.

Введём в программе неравенства данной системы в плоскости Oxa:

- $a + 3x \leq 12 \Leftrightarrow a \leq 12 - 3x$ и $a \leq x$ — точки под двумя прямыми;
- $a + 4x \geq x^2 \Leftrightarrow a \geq (x-2)^2 - 4$ — точки внутри параболы.



Из рисунка выше видно, что искомых значений a ровно два: одно задаётся средней линией EF треугольника ABC с основанием $AC = 4$, а другое — горизонтальной хордой B_1C_1 параболы со значениями $x = 2 \pm 1$ на концах.

В программе MathCad нужно вводить три функции (невозможно строить неравенства в плоскости), не хватает инструментов для построения точек и отрезков (сетка не такая точная, как в GeoGebra, где объекты можно приближать).

Рассмотрена также программа Desmos: функционал её графического калькулятора отделён от геометрического (в GeoGebra — единый матпакет), довольно беден и заключается в построении графиков и создании ползунков и таблиц значений.

Список использованных источников

[1] Воскобойников Ю.Е. и др. Решение инженерных задач в пакете MathCad: учебное пособие / под ред. Ю. Е. Воскобойникова. Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2013.

[2] Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами: для абитуриентов, школьников, учителей. М.: ИЛЕКСА, 2009.

[3] Садовничий Ю.В. Математика. Профильный уровень. Задачи с параметром: для учащихся старших классов, учителей математики, репетиторов. М.: Экзамен, 2020.

[4] Ефремова Т.П. Задачи с параметром: с нуля до ЕГЭ: учебное пособие для 7–11 классов. СПб.: Книжный дом, 2009.

[5] Ященко И.В. и др. ЕГЭ 2016. Математика. Типовые текстовые задания: для учащихся старших классов и учителей / под ред. И.В. Ященко. М.: 2016.

О ДВУХ СРАВНЕНИЯХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СУММ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ПО МОДУЛЮ ПРОСТОГО ЧИСЛА

Шишкова Алина Владимировна
9 класс, МКОУ ЦО № 10, г. Новомосковск, Россия

Научный руководитель: учитель МКОУ ЦО № 10
к.ф.-м.н. Роман Андреевич Вепринцев

Пусть k — натуральное число, $H_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$ — k-е гармоническое число, p — простое число, $q_p(2) = \frac{2^{p-1}-1}{p}$ — частное Ферма по основанию 2, $[x]$ — целая часть числа x, $\binom{n}{m}$ — биномиальный коэффициент, $\{E_n\}$ — множество чисел Эйлера, которые можно определить следующим образом (см. [1]):

$$E_0 = 1, \qquad E_{2n-1} = 0, \qquad \sum_{r=0}^{n} \binom{2n}{2r} E_{2r} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

Цель работы состоит в исследовании сравнений по модулю простого числа для некоторых сумм, включающих гармонические числа. Используемые методы стандартны для данной области теории чисел, а некоторые вспомогательные результаты являются уже классическими (см. [2]).

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть $p \geq 5$ — простое число. Тогда

$$\sum_{m=2}^{(p-1)/2} \frac{1}{m} H_{m-1} \equiv 2\left(q_p(2)\right)^2 \pmod{p}$$

и

$$\sum_{m=1}^{[p/4]} \frac{1}{m} H_m \equiv \frac{9}{2}\left(q_p(2)\right)^2 + 2 \cdot (-1)^{(p-1)/2} E_{p-3} \pmod{p}.$$

Список использованных источников

[1] Sun Z.H. Congruences involving Bernoulli and Euler numbers // J. Number Theory. 2008, 128, p. 280–312.

[2] Lehmer E. On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson // Ann. of Math. 1938, 39, p. 350–360.

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ

Якивчик Александр Андреевич
10 класс, школа № 1502 «Энергия», г. Москва, Россия

Научный руководитель: старший преподаватель НИУ МЭИ
Наталья Витальевна Якивчик

В работе представлены теоретические основы одного из алгебраических методов в геометрии — метода комплексных чисел. В частности, через комплексные координаты выведены и записаны следующие формулы [1]: расстояние между двумя точками, скалярное произведение векторов, условие перпендикулярности векторов, условие коллинеарности трёх точек и пары векторов, уравнение прямой, уравнение касательной к окружности, уравнение хорды окружности.

Далее, в работе приводится ряд примеров практического применения метода комплексных чисел.

При решении задач широко используется геометрический смысл оператора $z \to z_0 z$ умножения на число $z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ как гомотетического поворота (см. [1], с. 10) — композиции гомотетии с центром в нулевой точке с коэффициентом $r = |z_0|$ и поворота вокруг неё на угол $\varphi = \arg z_0$. В частности, поворот на 90° представлен как умножение на i (см. [2], с. 62).

Важен также удобный выбор комплексных координат. Применение свойств операции комплексного сопряжения $z \to \bar{z}$ и запись уравнения единичной окружности $z\bar{z} = 1$ существенно упрощает представление уравнений прямых и поиск комплексных координат, в частности, замечательных точек треугольника, если описанную около него окружность принять за единичную.

Показаны преимущества метода комплексных чисел: для некоторых задач проведено сравнение их решения этим методом с решением методами элементарной геометрии. Благодаря применению метода комплексных чисел в ряде случаев получены интересные обобщения и дополнительные результаты, которые вытекают из анализа полученных формул. В частности, с помощью метода комплексных чисел решены следующие задачи.

- Доказано утверждение для произвольного четырёхугольника *ABCD* (в том числе невыпуклого) о связи его сторон и диагоналей:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2,$$

где M и N — середины диагоналей *AC* и *BD*. Таким образом, сделано обобщение хорошо известной теоремы о сторонах и диагоналях параллелограмма.

- Решена задача о нахождении расстояния от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата, построенного на его гипотенузе. В качестве дополнительного результата получено, что прямая, соединяющая вершину прямого угла треугольника с центром квадрата, является биссектрисой прямого угла. Для сравнения приведены доказательства того же факта двумя другими методами: с помощью дополнительного построения (описанной окружности) и с использованием тригонометрических формул. Эти методы более трудоёмки по сравнению с методом комплексных чисел.
- Доказано, что для любого треугольника центр описанной окружности, центр тяжести и ортоцентр лежат на одной прямой (прямой Эйлера). В качестве дополнительного результата получен геометрический факт: центр тяжести треугольника делит отрезок, соединяющий центр описанной окружности и ортоцентр, в отношении $1 : 2$, считая от центра описанной окружности.

Планируется продолжить применение метода комплексных чисел к доказательству планиметрических теорем и решению задач, составить сборник планиметрических задач, решаемых методом комплексных чисел, изучить теорию функций комплексного переменного.

Список использованных источников

[1] Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.

[2] Скопец З.А. Геометрические миниатюры / сост. Г.Д. Грейзер. М.: Просвещение, 1990.