Младшие

1. Однажды Гаврила вскипятил чайник и налил горячую воду в цилиндрическую термокружку. Он не стал закрывать крышку, так что стенки оказались термоизолированными, а поверхность жидкости открыта в комнату. Он заметил, что температура воды упала с 90°C до 80°C за 50 секунд. В другой раз он налил такое же количество воды в обычную цилиндрическую чашку такого же радиуса, что и термокружка, но плотно закрыл чашку крышкой, исключив теплообмен через верхнюю поверхность. В этом случае температура воды упала с 90°C до 80°C за 30 секунд. За какое время произойдет такое же изменение температуры в открытой чашке, если туда налить такое же количество воды?

Решение:

Будем считать, что мощность теплообмена через стенки чашки и через свободную поверхность (поверхность жидкости) не зависит от того, работает ли одновременно другой механизм и слабо зависит от температуры жидкости в исследуемом диапазоне температур. В таком случае мощность теплообмена через свободную поверхность в термосе P_1 равна мощности теплообмена через поверхность жидкости в чашке, так как сказано, что они одного радиуса. Мощность теплообмена через стенки чашки обозначим P_2. Времена остывания из условия в термосе и в чашке обозначим соответственно τ_1 и τ_2.

В таком случае имеем соотношенияна количества теплоты:

$$cm\Delta T = P_1\tau_1; \quad cm\Delta T = P_2\tau_2;$$
$$cm\Delta T = (P_1 + P_2)\,\tau,$$

Где c – теплоемкость воды, m – масса воды, ΔT – разница температур.

Таким образом, из первых двух уравнений можно найти связь между P_1и P_2, после чего из третьего и любого из первых двух получить соотношение:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

$$\tau = \frac{75}{4} = 18{,}75\ c$$

2. Летающий робот расставляет маленькие конусы по плоской площадке так, что их основания касаются друг друга, а центры лежат на концентрических окружностях. В центре этих окружностей находится большая стопка с конусами. Робот подлетает к стопке, берет один конус, летит по прямой на нужное место на окружности, опускает конус и возвращается за следующим. Время, которое тратится на захват и отпускание конуса мало по сравнению с временем в пути, скорость полета постоянна. Робот не заканчивает ставить конусы на окружность текущего радиуса до тех пор, пока не поставит все конусы, которые помещаются на нее, после этого он переходит на следующую окружность, радиус которой больше радиуса предыдущей на диаметр основания конуса.
    a. Робот расставил конусы на окружности радиуса 3 метра за 15 минут. Оцените, за какое время он расставит конусы по окружности радиусом 5 метров?
    b. Школьница Мария наблюдала за роботом и обнаружила, что зависимость радиуса окружности, на которой расставляются конусы, от времени близка к степенной. Определите показатель степени этой зависимости.

    Решение:

    a. Расставляя конусы по фиксированной окружности радиуса R, робот совершает к стопке и обратноN рейсов, каждый из которых длины $2R$. Количество рейсов пропорционально длине окружности, то есть R, значит, время, которое затрачивается на данную окружность пропорционально R^2. Значит, на окружность радиуса 5 м уйдет

$$T_2 = T_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{125}{3} \text{мин} = 41 \text{ мин } 40 \text{ сек}$$

b. Когда робот заканчивает работать на одной окружности, он переходит на другую, близкого радиуса, причем изменение радиуса фиксировано и равно диаметру конуса. Время между последовательными переходами от одного радиуса к другому

$$\Delta t \sim R^2,$$

То есть радиус увеличивается по закону

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{A}{R^2},$$

где A— некоторая константа размерности м^3/с. Радиус окружности, на которой расставляются конусы в данный момент, зависит от этой константы и от времени, других параметров в задаче нет. Из соображений размерности

$$R(t) \sim (At)^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, искомый показатель степени 1/3.

Приведем также второе решение. Радиусы окружностей дискретны и образуют арифметическую прогрессию $R_i - R_{i-1} = const = D_{\text{конуса}}$. Из пункта амы получили зависимость между временами и радиусами любых 2 окружностей, применим ее к самой первой окружности и произвольной, получим время, которое тратится на произвольную окружность с номером i:

$$T_i = T_1 \frac{R_i^2}{R_1^2}$$

В таком случае время, которое прошло до перехода на R_{i+1} радиус равно сумме времен:

$$T(R_n) = \sum_{i=1}^{n} T_1 \frac{R_i^2}{R_1^2} = \frac{T_1}{R_1^2} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \sim \frac{T_1}{R_1^2} R_n^3$$

Последняя пропорциональность является известным фактом, что сумма квадратов членов арифметической прогрессии равна многочлену третьей степени от n. То есть мы получили тот же результат, что время пропорционально третьей степени радиуса (или наоборот радиус пропорционален времени с показателем степени 1/3), чем больше радиус окружности (или номер окружности), тем точнее эта зависимость.

$$R_n \sim T^{\frac{1}{3}}$$

Можно считать ее асимптотической.

3. Василий купил фотодатчик, который детектирует, что объект пересекает луч зрения камеры датчика и измеряет расстояние до этого объекта в момент пересечения. Василий соорудил небольшую пусковую установку, поместил ее на расстоянии 5 м от стены и стал бросать небольшие шарики перпендикулярно стене под углами от 30° до 60°к горизонту. Между точкой старта и стеной, на расстоянии 0.5 м от точки старта, он установил датчик, направив его луч зрения вертикально вверх.С помощью датчика Василий хочет рассчитать, на какой высоте шарик попадет в стену (высота считается от уровня точки старта). Он знает,

что шарики вылетают из пусковой установки со скоростью 10 м/с и практически не испытывают сопротивления воздуха.

a. Укажите приближенное выражение, которое даст Василию требуемую величину, и вычислите высоту точки, в которую попадет шарик, пролетевший в 55 см над датчиком.
b. Оцените относительную ошибку ваших вычислений

Решение:

Запишем уравнение траектории шарика:

$$y\,(x) = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2V^2}(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha),$$

где x, y декартовы координаты с началом в точке старта, ось y направлена вверх,g – ускорение свободного падения, V – начальная скорость шарика, α – угол между вектором начальной скорости и горизонтом. Показания датчика $y_1 = y(x_1)$ позволяют определить $tg\ \alpha$,x_1 – координата датчика. После того, как тангенс угла найден, можно вычислить требуемую высоту как$y_2 = y(x_2)$где x_2 – координата стены. Проблема в том, что для определения тангенса нужно решить квадратное уравнение, корни которого потом подставить в квадратный трехчлен. В результате получится громоздкое выражение, пользоваться которым затруднительно.

Заметим, что в рассматриваемом диапазоне углов тангенс порядка единицы и отношение второго члена к первому в правой части уравнения траектории для $x = x_1$

$$\frac{gx_1}{2V^2} \sim 2.5 \cdot 10^{-2} \ll 1,$$

то есть можно пренебречь вторым членом при определении тангенса и получить

$$tg\ \alpha \approx \frac{y_1}{x_1}$$

Что дает

$$y_2 \approx y_1\frac{x_2}{x_1} - \frac{gx_2^2}{2V^2}\left(1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)$$

Для $y_1 = 0.55$ м получаем ответ

$$y_2 \approx 2.75\ м$$

Точность вычислений определяется ошибкой при вычислении тангенса и округлении значенияg. Пусть ошибка определения тангенса δ:

$$tg\alpha = \frac{y_1}{x_1} + \delta$$

Найдем абсолютную ошибку определения y_2. Так как

$$y_2 = y_1\frac{x_2}{x_1} - \frac{gx_2^2}{2V^2}\left(1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right) + \delta\left(x_2 - \frac{gx_2^2}{V^2}\frac{y_1}{x_1}\right) - \delta^2\frac{gx_2^2}{2V^2}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2$$

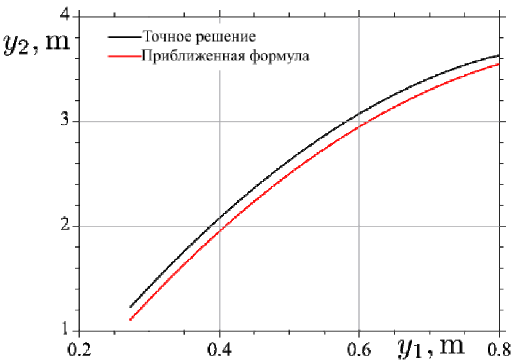
Оценим абсолютную ошибку как

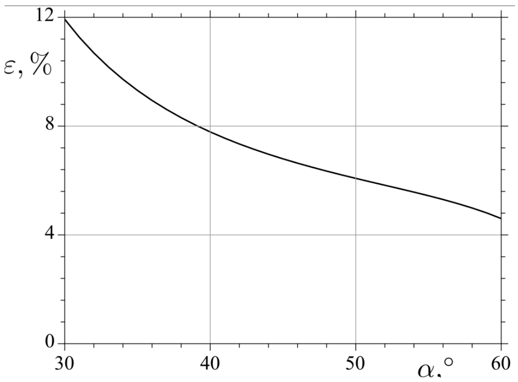
$$\Delta = \left|\delta\left(x_2 - \frac{gx_2^2}{V^2}\frac{y_1}{x_1}\right)\right| \approx \left|tg\ \alpha - \frac{y_1}{x_1}\right|\left|x_2 - \frac{gx_2^2}{V^2}tg\ \alpha\right|$$

и относительную как

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{x_2 tg\alpha - \frac{gx_2^2}{2V^2}(1 + tg^2\alpha)}$$

Для оценки погрешности вычисления примем угол равным 45°, так что имеем$\varepsilon \approx 5\%$ На рисунках показана требуемая зависимость, полученная по точным соотношения и с помощью предложенной оценки, а также зависимость относительной погрешности от угла между начальной скоростью и горизонтом





Полученная ошибка сравнима с той, которая делается при округлении ускорения свободного падения до 10 м/с^2. На практике основную погрешность при определении траектории движения падающего тела вносит сопротивление воздуха.