Системы переменного состава

Везде ниже ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.

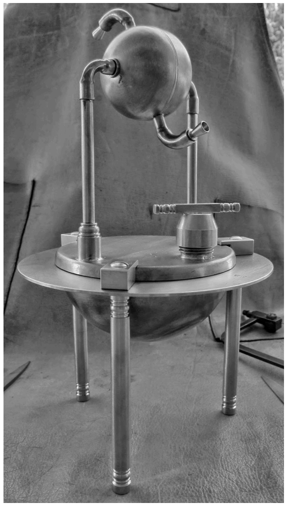
1. Какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести? Считайте, что в нулевой момент масса ракеты равна M_0, скорость истекающих газов относительно ракеты равна u. Сначала ответьте на вопрос для малых значений t. Какому сильному неравенству вида $\alpha t \ll \beta$ должно удовлетворять значение времени t, чтобы его можно было считать малым в этой задаче? За какое время $t_{1/2}$ масса ракеты уменьшится в два раза? Какими будут ответы на вопросы задачи, если ракета движется вверх с ускорением a?

2. Ракета с космонавтом стартует с поверхности Земли и движется вертикально вверх с постоянным ускорением, таким, что вес космонавта увеличивается втрое по сравнению с нормальным значением. Сжигая некоторое количество топлива ракета достигает скорости v. Пусть $v_{\max}$ — максимально возможная скорость, которой могла бы достичь эта ракета, использовав такое же количество топлива, как в первом случае, при условии, что относительная скорость истечения газов из сопла в обоих случаях одинаковая и не зависит от скорости движения ракеты. Найдите отношение $n = \frac{v_{\max}}{v}$. Изменением ускорения свободного падения с ростом высоты, а также сопротивлением воздуха можно пренебречь.

3. Предложен следующий проект ракетного космического двигателя: луч лазера направляется на кусок льда, помещённый в резервуар с отверстием площадью S. Мощность лазера N полностью идёт на испарение льда. Удельная теплота испарения льда равна L, плотность пара, выходящего через сопло из двигателя, равна ρ. Найдите силу тяги такого двигателя.

Пётр А. Крюков

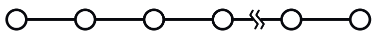
4. Эолипил (старинный паровой двигатель) представляет собой герметичный металлический котёл с двумя трубками на крышке, на которых, как на оси, может вращаться турбина в виде полого шара с двумя одинаковыми Г-образными патрубками (соплами). В котел заливают воду, закрывают его и ставят на огонь. Образующийся в котле при кипении воды пар по трубкам поступает в шар и выходит с большой скоростью через сопла, заставляя шар вращаться На рисунке слева показана гравюра из «Википедии», а справа — фотография действующей модели, сделанной американцем David Crisalli.



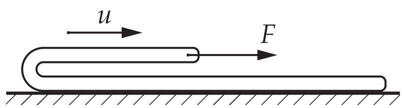
Мощность подвода тепла к воде $P = 1$ кВт, площадь сечения патрубка $S = 0{,}1$ см^2, расстояние от сопла до оси вращения $d == 10$ см, плотность пара, выходящего из сопла, $\rho = 0{,}6$ кг/м^3, удельная теплота парообразования $L = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. Определите момент сил, действующих на шар со стороны пара, если шар зафиксирован. До какого максимального количества оборотов в минуту может раскрутиться шар, если позволить ему свободно вращаться? Всеми видами трения можно пренебречь.

Пётр А. Крюков

5. Цепочка, состоящая из одинаковых маленьких тяжёлых шариков, соединённых нерастяжимыми, невесомыми нитями одинаковой длины (см. рисунок, изображено горизонтальное положение цепочки) падает из вертикального положения на чашку весов. Изобразите качественный график зависимости показаний весов от времени. Считайте, что в начальный момент времени нижний конец цепочки касается чашки весов. Как изменится график (требуемый в качестве ответа), если в начальный момент нижний конец цепочки располагался на некоторой высоте над чашкой весов?



К задаче 5



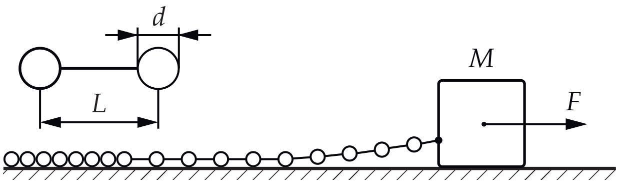
К задаче 6

6. Длинный тонкий гибкий ковёр лежит на полу. Один конец ковра загнули и с постоянной горизонтальной скоростью, равной $u = 1$ м/с потянули назад над той частью ковра, которая покоится. Найдите скорость центра масс движущейся части ковра, если длина ковра равна $L = 1$ м, а его масса равна $m = 1$ кг. Какова минимальная сила, необходимая для того, чтобы тянуть движущуюся часть ковра?

7. На гладкой горизонтальной поверхности разложена цепочка, состоящая из очень большого количества бусинок массой $m = 2$ г каждая, соединённых тонкими нерастяжимыми нитками. Диаметр бусинки равен $d = 4$ мм, расстояние между центрами бусинок (когда нить натянута) равно $L = 2{,}2$ см. Конец цепочки прикреплен к кубику массой $M = 1$ кг (см. рисунок). Массой ниток по сравнению с массой бусинок можно пренебречь. Сначала все бусинки цепочки касаются друг друга, а нитки провисают. В некоторый момент на кубик начинает действовать горизонтальная сила $F = 1$ Н, и он начинает ускоряться, вовлекая

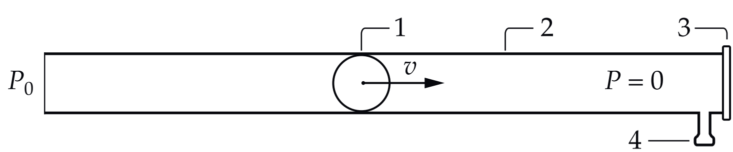
Пётр А. Крюков

в движение бусинки. Чему станет равна скорость кубика через полсекунды после начала движения? Определите скорость кубика спустя длительное время после начала движения и найдите среднюю тепловую мощность, рассеиваемую при этом в окружающую среду.

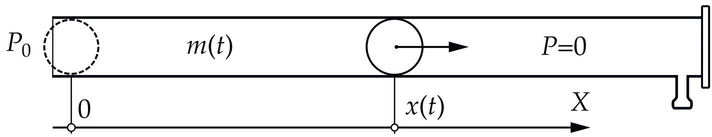


К задаче 7

8. Устройство под названием «вакуумная пушка» схематично изображено на рисунке ниже. В полипропиленовой водопроводной трубе 2, один конец которой герметично закрыт заглушкой из фольги 3, а другой открыт в атмосферу, разностью давлений ускоряется шарик 1 для игры в пинг-понг массой $M = 2{,}7$ г. Внутренний диаметр трубы близок к диаметру шарика, который равен $d = 40$ мм. Рядом с заглушкой располагается штуцер 4, через который труба соединяется с вакуумным насосом. Таким образом, справа от шарика давление очень низкое, а у открытого конца трубки — давление, близкое к атмосферному, которое равно $P_0 = 10^5$ Па. За счёт разности давлений шарик разгоняется до высокой скорости, разрывает фольгу заглушки и вылетает из трубки.



В приближённой модели явления движение шарика и воздуха, располагающегося в трубе слева от шарика, рассматривается как движение тела с переменной массой. Считается, что под действием разности давлений ускоряются шарик и воздух внутри трубки, а также вовлекаются в движение новые порции воздуха из атмосферы. Другими силами предлагается пренебречь. Считается, что область вблизи левого торца трубы, в которой воздух вовлекается в движение, имеет малый характерный размер, сопоставимый с диаметром трубы. Снаружи трубы вне этой области воздух считается неподвижным, его плотность в любой точке равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Внутри трубы воздух движется со скоростью шарика, а его плотность такая же как снаружи. Диаметр шарика много меньше длины трубы. В начальный момент времени координата x шарика и его скорость равны нулю. Расположение оси OX показано на рисунке ниже.



Определите максимальную скорость, до которой может быть разогнан шарик в трубе достаточно большой длины. Получите формулу зависимости координаты шарика от времени $x(t)$.

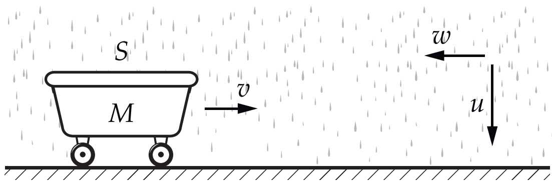
9. Тазик на колёсиках движется под дождём по горизонтальной дороге. Суммарная масса капель в единице объёма равна ρ, а их скорость вблизи поверхности земли равна u. Площадь верхнего горизонтального сечения тазика равна S. В нулевой момент ($t = 0$) таз пустой, его масса вместе с колёсами равна M, а скорость равна v_0. Далее везде силой трения качения и силой сопротивления воздуха можно пренебречь.

а. Пусть в дне таза есть небольшое отверстие. Дождевая вода, попадая в таз, стекает на дно, распределяется по нему тонким слоем и вытекает через отверстие. Можно считать, что масса воды в тазу пренебрежимо мала по сравнению с массой таза.

a1) Какое расстояние L_1 пройдёт таз до остановки, если капли падают вертикально?

a2) Подул встречный (для тазика) ветер, так что горизонтальная составляющая скорости капель вблизи земли оказалась равна w, а вертикальная — равна u. Какое расстояние L_2 пройдет тазик до остановки, если время движения равно t?

b. В этой части задачи считается, что дырок в тазике нет, вся попадающая в таз дождевая вода остаётся в нём. За рассматриваемое время вода не заполняет таз целиком и не переливается через борт. Ветра нет, скорость капель направлена вертикально. Определите зависимость скорости таза от времени $v(t)$. Если таз проходит расстояние L_M к моменту, когда масса воды в нём становится равна массе таза M, то какое расстояние он пройдёт к моменту, когда масса воды в нём станет равна $3M$?



К задаче 9

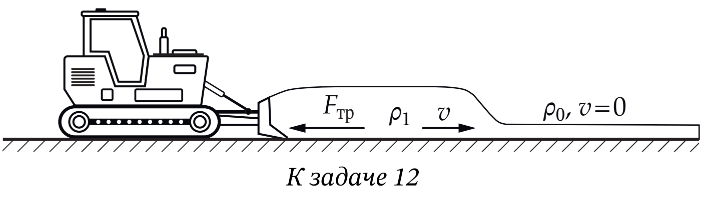
10. Шарообразная капля воды падает в атмосфере пересыщенного водяного пара. Считая, скорость возрастания массы капли $\frac{dm}{dt}$ пропорциональной площади её поверхности, и пренебрегая силами сопротивления среды, определите зависимость скорости капли от времени $v(t)$. Предполагается, что в момент зарождения капли ($t = 0$), её скорость была равна нулю.

11. Труба радиусом r заполнена пористым веществом плотностью ρ_0. Поршень, на который действует постоянная сила F, двигаясь в трубе, уплотняет вещество до плотности ρ. С какой скоростью движется поршень, если уплотнение вещества происходит скачком, иначе говоря, в трубе перемещается с некоторой скоростью плоская граница раздела между веществом с плотностью ρ_0 и веществом с плотностью ρ? В начальный момент времени эта граница совпадает с поверхностью поршня.

12. Некоторые особенности процесса сгребания снега бульдозером можно описать на основе следующей простейшей модели. Вдали от бульдозера (см. рисунок) слой снега в полосе шириной с щит бульдозера имеет линейную плотность ρ_0 и покоится. Бульдозер и часть снега, прилегающая к его щиту, движутся с постоянной скоростью v. На движущуюся часть действует сила трения, удовлетворяющая закону Кулона-Амонтона: $F_{\text{тр}} = \mu N$; коэффициент трения μ считается известным.

a. Пусть весь снег, вовлекаемый бульдозером в движение, распределяется в движущейся части со средней постоянной линейной плотностью ρ_1. Бульдозер в состоянии действовать на движущуюся часть с горизонтальной силой, не превышающей значения F_0. Найдите время, в течение которого возможно движение бульдозера с постоянной скоростью v.

b. Пусть после того, как масса снега в движущейся части достигает некоторого значения M_0, она перестаёт увеличиваться. При вовлечении в движение небольшой порции снега, такая же порция покидает движущуюся часть, скатываясь вбок относительно направления движения. Какую полезную мощность W_1 должен развивать бульдозер при движении с постоянной скоростью v в этом случае?



К задаче 12

Пётр А. Крюков

Ответы

1. $\mu = \frac{M_0 g}{u}$ при $gt \ll u$. $\mu(t) = \frac{M_0 g}{u} e^{-\frac{gt}{u}}$, $t_{1/2} = \frac{u \ln 2}{g}$; если ракета движется вверх с ускорением a, то во всех формулах следует заменить ускорение свободного падения g на ускорение $g_1 = g + a$.

2. $n = \frac{3}{2}$. В случае движения с постоянным ускорением, интегрируя уравнение Мещерского (подобно решению предыдущей задачи), получим соотношение

$$v = \frac{2u}{3} \ln \frac{m_0}{m}, \tag{1}$$

где u — относительная скорость газов, покидающих ракету, m — масса ракеты в момент достижения скорости v. В общем случае уравнение движения приводится к виду

$$mdv + udm + m(gdt) = 0.$$

Максимум скорости v при заданной скорости u достигается в случае такого быстрого разгона, что последним слагаемым в этом уравнении можно пренебречь. Тогда после интегрирования имеем

$$v_{\max} = u \ln \frac{m_0}{m}. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) следует ответ.

3. $F = \frac{N^2}{L^2 \rho S}$. В данном случае силой тяги логично назвать следующую фиктивную величину с размерностью силы $\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \sum \mathbf{F}_{\text{вн}}$, $\sum \mathbf{F}_{\text{вн}}$ — равнодействующая внешних сил.

4. $M = \frac{P^2 d}{2S\rho L^2} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ Н·м; $n_{\max} = \frac{P t_0}{4\pi \rho L S d} \approx 3700$ об/м, где $t_0 = 60$ с. Поскольку во втором вопросе, фактически, надо дать оценку сверху рассуждать можно так. Пусть за малое время dt в шар поступает масса пара $dM^{(+)}$, а через патрубки шар покидает масса пара $dM^{(-)}$, тогда при вращении с максимальной угловой скоростью момент импульса системы, состоящей из шара с паром и масс $dM^{(+)}$ и $dM^{(-)}$, относительно оси вращения не должен меняться со временем, поскольку внешние силы на эту систему не действуют. На самом деле, на шар и массу $dM^{(-)}$ действуют силы вязкого трения со стороны воздуха, находящегося снаружи шара, но учитывая, что нас интересует оценка сверху, ими можно пренебречь. Из неизменности момента импульса следует равенство нулю импульса пара, истекающего из патрубков, в лабораторной системе отсчёта. Следовательно, относительная скорость пара на выходе из сопла u должна быть равна по величине линейной скорости сопла $v_{\max} = 2\pi d \frac{n_{\max}}{t_0}$ в лабораторной системе.

5. $P = 3Mg \cdot \frac{gt^2}{2L}$.

6. $v_{\text{c.m.}} = \frac{3u}{4} = 75$ см/с, $F = \frac{mu^2}{2L} = 0{,}5$ Н.

7. $v(0{,}5\text{ с}) \approx 0{,}5$ м/с; $v = \sqrt{\frac{F(L-d)}{m}} = 3$ м/с; $N = \frac{Fv}{2} = 1{,}5$ Вт.

8. $u = \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \approx 294$ м/с; $x(t) = -\frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{P_0 t^2}{\rho}}$.

9. a1) $L_1 = \frac{Mv_0}{\rho u S}$; a2) $L_2 = \frac{Mv_0}{\rho u S} - wt$. b) $v(t) = \frac{Mv_0}{M + \rho u S t}$, $L_{3M} = 2L_M$.

10. Капля будет двигаться вниз с постоянным ускорением, равным $\frac{g}{4}$.

11. $v = \sqrt{\frac{F(\rho - \rho_0)}{\pi r^2 \rho \rho_0}}$.

12. a) $t = \frac{F_0}{\mu g v} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \rho_0} - \frac{v}{\mu g}$; b) $W_1 = \mu M_0 g v + \rho_0 v^3$.

Пётр А. Крюков