Олимпиада «Математика реальности» (ОМаР)
Старшая лига. 31.10.2023

Задача 1

На продуктовом складе каждый мешок муки расфасовывают по ***почти килограммовым*** пакетам, т.е. таким, что вес p кг любого из них удовлетворяет условию

$$|p-1| \le \varepsilon.$$

Найдите ***наименьшее*** значение P_0, для которого мешок муки любого веса в P кг, не обязательно целочисленного, но удовлетворяющего оценке

$$P \ge P_0,$$

можно весь без остатка расфасовать по почти килограммовым пакетам (возможно, неодинакового веса):

а) при $\varepsilon = 0{,}007$;

б) при произвольном $\varepsilon \in (0;\ 0{,}2)$.

Ответы: **а)** 70,503; **б)** $\left\lceil \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rceil (1-\varepsilon)$.

Решение. Всевозможные значения веса P любого мешка, который можно расфасовать по $n \in \mathbb{N}$ почти килограммовым пакетам, заполняют отрезок

$$K_n = [n(1-\varepsilon), n(1+\varepsilon)].$$

Запишем условие того, что между двумя соседними отрезками K_n и K_{n+1} нет зазора:

$$n(1+\varepsilon) \ge (n+1)(1-\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; n \ge \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; n \ge \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rceil = n_0,$$

где через $\lceil x \rceil$ обозначено наименьшее целое число, большее или равное x. Таким образом, все отрезки K_n с номерами

$$n \ge n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil \left(\ge \left\lceil \frac{1}{2\cdot 0{,}2} - \frac{1}{2} \right\rceil = 2 \right)$$

целиком заполняют луч $[P_0, +\infty)$, где

б) $P_0 = n_0(1-\varepsilon) = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rceil (1-\varepsilon)$,

причём между этим лучом и предыдущим отрезком K_{n_0-1} зазор уже имеется, т.е. P_0 — это искомое наименьшее значение веса мешка. Отсюда

а) при $\varepsilon = 0{,}007$ получаем

$$P_0 = \left\lceil \frac{1-0{,}007}{2\cdot 0{,}007} \right\rceil (1-0{,}007) = 71 \cdot 0{,}993 = 70{,}503.$$

Задача 2

Ромбический домкрат в рабочем состоянии выглядит как ромб, у которого горизонтальная диагональ располагается вдоль длинного винта с ручкой (см. рис.). Эту ручку вращают с постоянной скоростью, в результате чего горизонтальная диагональ ромба сокращается на 1 мм в секунду, а вертикальная диагональ растёт, причём её нижняя точка (площадка) фиксирована на полу, а верхняя — поднимается вместе с грузом. В ***начальном*** положении ромб сплюснут так, что верхняя и нижняя его точки соприкасаются, а в ***конце*** вращения ромб вытягивается в вертикальный столбик.

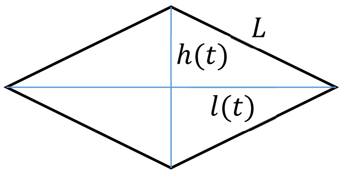
Ответьте на следующие вопросы о ***скорости подъёма*** верхней точки домкрата при вращении ручки:

а) когда эта скорость максимальна: в начале вращения, в конце вращения или в какой-то промежуточный момент?

б) в каких границах меняется эта скорость в ходе подъёма?

Ответы: **а)** в начальный момент; **б)** от $+\infty$ до 0.

Решение. Пусть $l(t), h(t) \in [0, L]$ — половины горизонтальной и вертикальной диагоналей ромба соответственно в момент $t \in [0, T]$, где $l(0) = L$ — длина стороны ромба и $l(T) = 0$. Тогда для скоростей изменения этих длин (в мм/с) с помощью теоремы Пифагора (см. рис.) получаем



$$l'(t) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad h'(t) = \left(\sqrt{L^2 - l(t)^2}\right)' = -\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{L^2 - l(t)^2}} = \frac{l(t)}{2\sqrt{L^2 - l(t)^2}} = \frac{l(t)}{2h(t)}.$$

Скорость $h'(t) \geq 0$ с ростом t убывает, так как числитель последней дроби уменьшается, а знаменатель увеличивается, поэтому

а) скорость подъема максимальна в начальный момент.

Более того, полученная дробь при $t \to 0$ растёт неограниченно (поскольку её знаменатель стремится к 0 при положительном и отделённом от 0 числителе), а при $t \to T$ убывает до 0, т.е. в итоге скорость $2h'(t)$ подъёма домкрата меняется

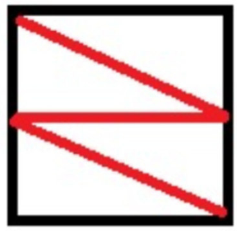
б) от $+\infty$ до 0.

Задача 3

Квадратный лист бумаги разрешается сгибать (а потом обязательно разгибать) по любой прямой линии, которая:

- либо проходит через две *ранее построенные* точки, т.е. точки на пересечении уже имеющихся линий сгиба и/или краёв листа (включая вершины квадрата);
- либо проходит через ранее построенную точку перпендикулярно к краю листа (в результате складывания этот край совмещается сам с собой);
- либо является серединным перпендикуляром к отрезку с концами в ранее построенных точках (в результате складывания эти две точки совмещаются).

К примеру, на рисунке горизонтальная линия сгиба даёт два равных прямоугольника, а все 3 сгиба вместе дают 4 равных треугольника.



Сколько раз нужно согнуть квадрат размером 1×1, чтобы получить прямоугольник размером:

а) $\frac{1}{3} \times 1$;

б) $\frac{1}{5} \times 1$;

в) $\frac{1}{6} \times 1$;

г) $\frac{1}{7} \times 1$?

Постарайтесь в каждом случае обойтись как можно меньшим числом сгибаний: чем их меньше, тем выше оценка за решение задачи.

Ответы: **а)** 4; **б)** 5; **в)** 4; **г)** 5.

Решение. Согнём квадрат $ABCD$ пополам по прямой EF, параллельной стороне AB (1-й сгиб), а затем:

а, в) по диагонали BD (2-й сгиб), по прямой AF, пересекающей диагональ BD в точке G (3-й сгиб), и по прямой XY, проходящей через точку G перпендикулярно стороне AD (4-й сгиб), тогда прямоугольники $ABYX$ и $EFYX$ (рис. 1) — требуемые в пп. а) и в) соответственно, так как

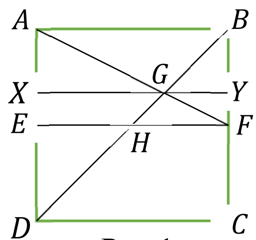


Рис.1

$$EX : AX = HF : AB = 1 : 2 \ \Rightarrow\ AX = \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AD,\ \ EX = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{6}AD;$$

б) по диагонали BD (2-й сгиб), затем по серединному перпендикуляру GH к отрезку AE (3-й сгиб), затем по прямой AH, пересекающей диагональ BD в точке I (4-й сгиб), а затем по прямой XY, проходящей через точку I перпендикулярно стороне AD (5-й сгиб), тогда прямоугольник $ABYX$ (рис. 2) — требуемый, так как

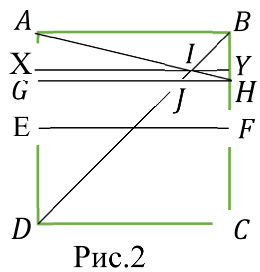


Рис.2

$$GX : AX = JH : AB = 1 : 4 \ \Rightarrow\ AX = \frac{4}{5}AG = \frac{1}{5}AD;$$

г) по серединному перпендикуляру GH к отрезку AE (2-й сгиб), затем по серединному перпендикуляру IJ к отрезку AG (3-й сгиб), затем по прямой DJ (рис. 3), пересекающей отрезок GH в точке K (4-й сгиб), а затем по прямой XY, проходящей через точку K перпендикулярно стороне AB (5-й сгиб), тогда прямоугольник $BCYX$ — требуемый, так как

$$BX : AB = KH : CD = JH : JC = 1 : 7 \quad \Rightarrow \quad BX = \frac{1}{7}AB.$$

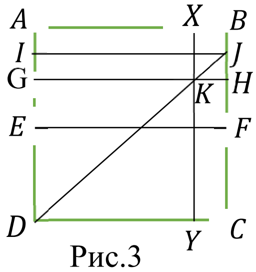


Рис.3

Замечание. В п. а) (рис. 1) показано, как, зная середину E стороны AD, получить точку X, отсекающую треть этой стороны. Аналогично доказывается, что если $AE = \frac{1}{n}AD$, то такое же построение даёт $AX = \frac{1}{n+1}AD$. Повторное применение этого приема позволяет, начав с квадрата, получить любой прямоугольник $\frac{1}{n} \times 1$. Этот способ универсальный, но не самый короткий.