Весенние сборы (геометрия, 9 классы)

Теоретический материал по геометрии треугольника, разобранные задачи и задачи для самостоятельного решения.

Биссектриса

Биссектриса внутреннего угла треугольника – это отрезок прямой, заключенный внутри треугольника и делящий данный угол на две равные части.

Биссектриса обладает следующими важными *свойствами*:

1) биссектриса – есть *геометрическое место точек*[1], равноудаленных от сторон угла;

2) во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке O (рис. 1), являющейся центром окружности, *вписанной* в треугольник (т.е. касающейся всех его сторон);

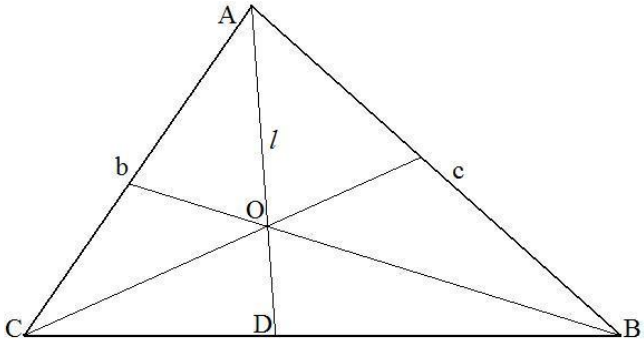

Рис. 1

3) биссектриса AD (рис. 1) любого угла A треугольника ABC делит противоположную сторону на части CD и BD, пропорциональные прилежащим сторонам AC и AB треугольника:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}.$$

Доказательство. Легко видеть, что площади треугольников ACD и ABD, имеющих общую вершину A, относятся как длины их оснований, т.е. $S_{ACD}: S_{ABD} = CD: BD$.

С другой стороны, эти площади относятся как длины сторон $b: c$ ($AC = b$, $AB = c$), поскольку $S_{ACD} = \frac{1}{2} bl \sin(\alpha/2)$, $S_{ABD} = \frac{1}{2} cl \sin(\alpha/2)$, где l – длина биссектрисы AD, а α – величина угла A и, следовательно, $S_{ACD}: S_{ABD} = b: c$. Из сравнения полученных пропорций и вытекает доказываемое утверждение;

4) *длина* l биссектрисы AD (рис. 1) угла A треугольника ABC, равного α, заключенного между сторонами AC и AB, определяется по формуле:

$$l = \frac{2bc \cos \alpha/2}{b + c} = \frac{2 \cos \alpha/2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Доказательство. Запишем площадь треугольника ABC двумя различными способами – один раз через стороны AC, AB и угол α, заключенный между ними, другой раз – через сумму площадей треугольников ACD и ABD:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bl \sin \alpha\,;$$

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} = \frac{1}{2} bl \sin \alpha/2 + \frac{1}{2} cl \sin \alpha/2.$$

Приравнивая эти выражения друг другу, получаем:

$$bc \sin \alpha = (b + c) l \sin \alpha/2,$$

или

$$2bc \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 = (b + c) l \sin \alpha/2,$$

откуда и следует указанная выше формула для вычисления длины биссектрисы.

---

[1] **Геометрическим местом точек** называется такое множество, которое содержит все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им.

Можно доказать и *свойство биссектрисы внешнего угла треугольника*: биссектриса BF внешнего угла треугольника (рис. 2), смежного с углом B, при $AB \neq BC$ пересекает продолжение противоположной стороны AC в такой точке F, что

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC};$$

в случае $AB = BC$ биссектриса внешнего угла параллельна основанию.

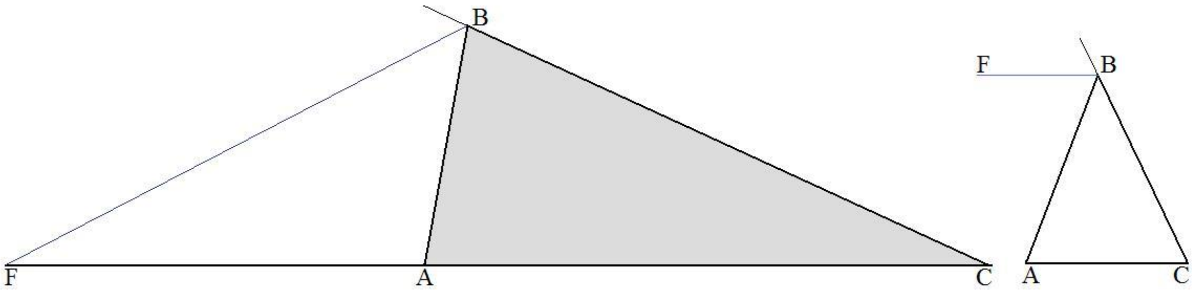

Рис. 2

При использовании следующих формул длины биссектрисы также необходимо рядом приводить их вывод (проделайте это самостоятельно):

А) $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$, где a_b, a_c – части стороны а, на которые ее делит биссектриса угла A;

Б) $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника.

Теорема Штейнера-Лемуса. *Любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух углов (измеряемые от вершины до противоположной стороны), является равнобедренным*[2].

А вот следующая забавная вариация на ту же тему почти неизвестна даже среди любителей геометрии.

Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?

Оказывается, утверждать это, вообще говоря, нельзя![3].

Задача 1. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и $AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение. Искомая площадь будет равна $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin AEB$.

---

[2] Эта теорема была послана шведскому геометру Якобу Штейнеру в 1840 году С.Л. Лемусом с просьбой дать чисто геометрическое доказательство. Штейнер дал довольно сложное доказательство, которое вдохновило многих других на поиск более простых методов.

[3] Подробное решение этой задачи дается в книге И.Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М., Наука, 1982), с. 157.

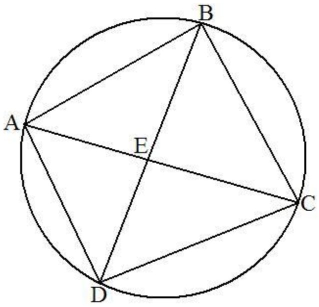

Рис. 3

1) Из условия $AD \cdot CE = DC \cdot AE$ имеем $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}$. Таким образом в треугольнике ADC отрезок DE делит противоположную сторону AC на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, DE – биссектриса в треугольнике ADC.

2) Тогда $\angle ADC = 2\angle ADB = \frac{\pi}{4}$ и по теореме синусов $AC = 2R\sin\frac{\pi}{4}$, R – радиус описанной окружности треугольника ADC, т.е. данной окружности.

3) Треугольник ABE подобен треугольнику DBA по двум углам, тогда $\angle AEB = \angle DAB$ и $\sin AEB = \sin DAB = \frac{BD}{2R}$ (по теореме синусов).

Искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin AEB = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\frac{\pi}{4} \cdot BD \cdot \frac{BD}{2R} = \frac{1}{2}BD^2 \sin\frac{\pi}{4} = 9\sqrt{2}.$$

Ответ. $9\sqrt{2}$.

Задача 2. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку C, параллельна BD. Известно, что $AB{:}\,BE = 3{:}\,1$ и $S_{ADC} = 18$. Найдите площадь треугольника CDE.

Ответ. 2.

Задача 3. В треугольнике ABC сторона AB равна 21, биссектриса BD равна $8\sqrt{7}$, а отрезок DC равен 8. Найти периметр треугольника ABC.

Ответ. 60.

Задача 4. Точка O лежит на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $OC = OD$ и точка O одинаково удалена от прямых DA, AB и BC. Найти углы четырехугольника, если $\angle AOB = 110°$ и $\angle COD = 90°$.

Ответ. 50°, 90°, 110°, 110°.

Задача 5. В треугольнике ABC проведены высота AH длины h, медиана AM длины l и биссектриса AN. Точка N – середин отрезка MH. Найти расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Решение.

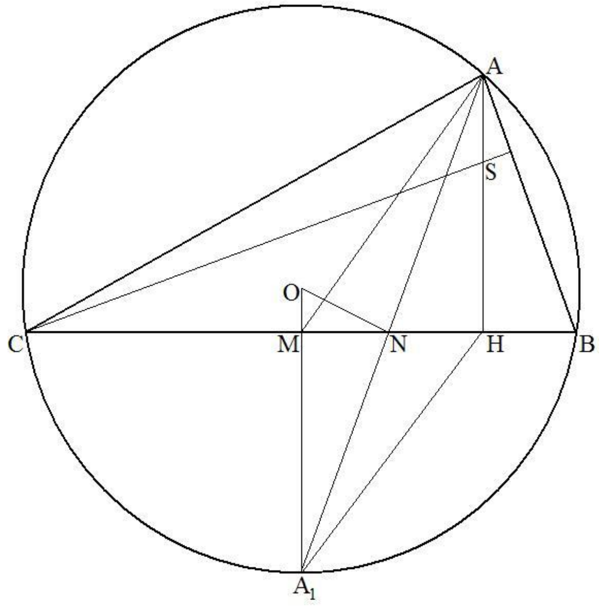

Рис. 4

Во многих задачах, связанных с биссектрисой треугольника, бывает полезно продолжить эту биссектрису до пересечения с описанной окружностью в середине дуги, на которую опирается рассматриваемый угол.
Тогда на рисунке будет хорошо видно, как именно друг относительно друга расположены биссектриса, медиана и высота.
На рис. 4 точка A_1 – середина дуги CB.

При этом радиус OA_1 проходит через точку M и $OA_1 \perp CB$, тогда $MAHA_1$ – параллелограмм ($MN = NH$ по условию), значит $AN = NA_1$, следовательно $ON \perp AA_1$ и $\Delta ONA_1 \sim \Delta NHA$ (по двум углам при вершинах A и A_1).

Пусть S – точка пересечения высот ABC, $AS = x$, $OC = OA_1 = R$, $MN = MH = y$, $AN = NA_1 = d$, $BC = a$.

1) $\Delta MAH: \; l^2 - h^2 = 4y^2$;

2) $\Delta NAH: \; d^2 - h^2 = y^2$;

3) $\Delta ONA_1 \sim \Delta NHA: \; \dfrac{d}{R} = \dfrac{h}{d} \Rightarrow Rh = \dfrac{3h^2 + l^2}{4}$;

4) $\Delta COM: \; \dfrac{a^2}{4} = R^2 - (R-h)^2$;

5) $\Delta CSH \sim \Delta ABH: \Rightarrow \dfrac{SH}{CH} = \dfrac{HB}{AH} \Rightarrow \dfrac{h-x}{a/2+2y} = \dfrac{a/2-2y}{h} \Rightarrow x = h - \dfrac{a^2/4 - y^2}{h}$.

Ответ. $\frac{l^2-h^2}{2h}$.

Задача 6. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найти AD.

Ответ. $c\sqrt{2 + \frac{c}{b}}$.

Задача 7. В треугольнике ABC дано: $AB = c$, $AC = b$ ($b > c$), AD – биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найти AE.

Ответ. $\frac{2bc}{b+c}$.

Задача 8. В треугольнике KLM радиус окружности равен R, угол K равен α, точка O – центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около треугольника KLM, в точке N. Найти ON.

Ответ. $2R \sin \alpha/2$.

Задача 9. Доказать, что биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.

Задача 10. Через основания биссектрис треугольника ABC проведена окружность. Рассмотрим три хорды, образованные при пересечении сторон треугольника с этой окружностью. Доказать, что длина одной из этих хорд равна сумме длин двух других.

Медиана

Определение. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны.

Для решения задач удобно пользоваться и другим определением:

медиана есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключенных внутри треугольника и параллельны той его стороне, к которой проведена медиана.

Рассмотрим *свойства* медиан.

Теорема 1. Во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$ считая от вершины.

Точка пересечения медиан называется *центром тяжести* треугольника (если подвесить картонный треугольник в точке пересечения его медиан, то он будет находиться в состоянии равновесия).

Доказательство (предложенное Архимедом). Воспользуемся следующими интуитивно ясными и имеющими простой механический смысл свойствами центра масс:

1) всякая система конечного числа материальных точек имеет центр масс и притом единственный;

2) центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющим эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: произведение массы точки на расстояние от нее до центра масс одинаково для обеих точек;

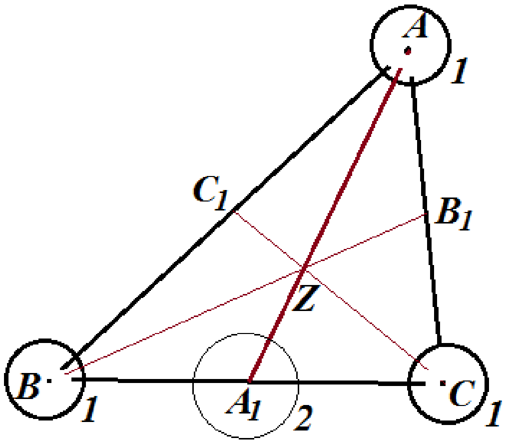

Рис. 5

3) если в системе материальных точек отменить некоторые из них, а массы отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение центра масс *всей* системы не изменится.

Пусть ABC – данный треугольник (рис. 5), AA_1, BB_1, CC_1 – его медианы. В вершинах этого треугольника расположим шарики одинаковой массы, скажем, по 1 грамму. Получающаяся система материальных точек имеет один центр масс Z (свойство 1). В силу свойства 3 положение центра масс не изменится, если массы материальных точек $1B$ и $1C$ перенесем в их центр масс, т.е. по свойству 2, в точку A_1. Тогда Z окажется центром масс всего двух материальных точек $2A_1$ и $1A$, т.е. $Z \in AA_1$. Аналогично убедимся, что $Z \in BB_1$ и $Z \in CC_1$. Т.е. медианы треугольника имеют общую точку Z. И по правилу рычага (свойств 2) имеем $2 \cdot ZA_1 = 1 \cdot ZA$, т.е. $ZA:ZA_1 = 2:1$.

Теорема 2. Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что медиана AA_1 разбивает треугольник ABC на два равновеликих (см. рис. 6), т.е. площади треугольников AA_1B и AA_1C одинаковы.

По теореме 1 все медианы пересекаются в одной точке Z (рис. 7). Так как точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника, то BZA_1 и CZA_1, а также AA_1B и AA_1C равновеликие. Значит AZB и AZC также равновеликие. Но AZB и AZC состоят из двух равных по площади треугольников, т.е. все шесть треугольников имеют одинаковую площадь, равную $1/6$ площади данного треугольника.

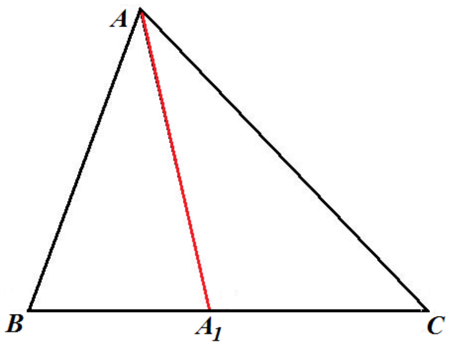

Рис. 6

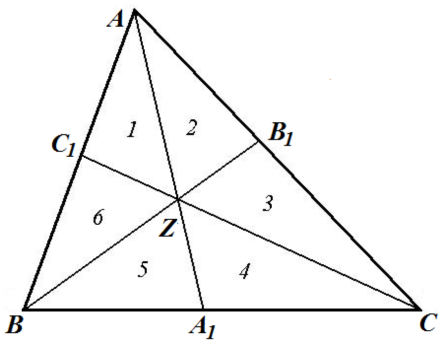

Рис. 7

Теорема 3. Длины медиан треугольника ABC можно выразить через его стороны:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2},\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + a^2) - c^2}.$$

Доказательство. Пусть стороны треугольника ABC имеют длины $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Найдем длину медианы $AA_1 = m_a$, проведенную к стороне BC, зная длины сторон треугольника. Для этого воспользуемся одним из очень удобных приемов, свойственных медиане, а именно достроим треугольник ABC до параллелограмма (рис. 8), проведя $BF||AC$ и $CF||AB$. Легко увидеть, что A_1 будет являться точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABFC$.

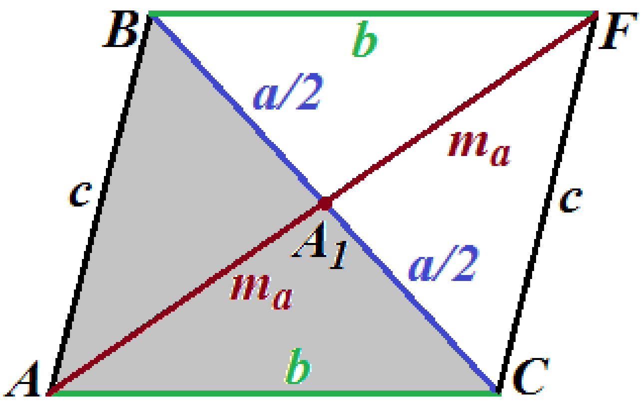

Рис. 8

Следовательно, длина диагонали AF будет равна $2m_a$, а вторая диагональ – $BC = a$.

Используя теорему о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равняется сумме квадратов всех его сторон (*следствие теоремы косинусов*), получаем равенство

$$4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2),$$

откуда следует, что

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2(b^2 + c^2) - a^2),$$

т.е. первая из доказываемых формул. Аналогично доказываются и остальные формулы. В них m_b и m_c – длины соответствующих медиан треугольника ABC.

Задача 1. Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник (т.е. треугольник со сторонами, равными медианам данного). Чему равно отношение площади данного треугольника и треугольника из его медиан?

Задача 2. Докажите, что для всех треугольников отношение суммы квадратов его медиан к сумме квадратов его сторон одно и то же. Чему равно это отношение?

Ответ. Сумма квадратов длин всех медиан треугольника равняется $3/4$ суммы квадратов длин его сторон.

Теорема 4 (*теорема Лейбница*). Пусть M – произвольная точка плоскости, G – центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC. Докажите, что имеет место равенство

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Следствие. Точка на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до вершин данного треугольника является минимальной, – это точка пересечения медиан этого треугольника.

В то же время минимальная сумма расстояний до вершин треугольника (а не их квадратов) будет для точки, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в $120°$, если ни один из углов треугольника не больше $120°$ (*точка Ферма*), или для вершины тупого угла, если он больше $120°$.

Тогда легко найти расстояние d от точки пересечения медиан до центра описанной окружности. Действительно, это расстояние по теореме Лейбница равно корню квадратному из одной трети разности между суммой квадратов расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника и суммой квадратов расстояний от точки пересечения медиан до вершин треугольника. Получаем, что

$$d = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}}.$$

Точка M пересечения медиан треугольника ABC является единственной точкой треугольника, для которой сумма векторов $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ равна нулю, т.е. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. Координаты точки M (относительно произвольных осей) равны средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника (из этих утверждений можно получить доказательство теоремы о медианах).

Задача 3. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение.

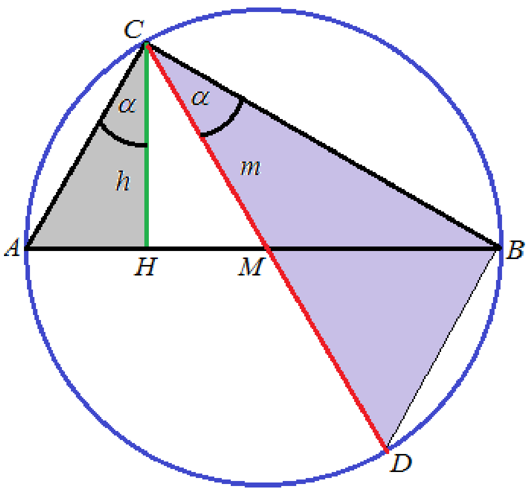

Рис. 9

Пусть высота CH и медиана CM треугольника ABC образуют со сторонами AC и BC равные углы (рис. 9). Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим медиану CM до пересечения с окружностью в точке D. Рассмотрим треугольники ACH и BCD. Так как $\angle ACH = \angle BCM$ по условию и $\angle CAB = \angle CDB$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то оставшиеся углы двух треугольников ACH и BCD соответственно прямые, т.е. $\angle AHC = \angle CBD = 90°$. Следовательно, CD – диаметр окружности, причем $CM = MD$.

С одной стороны центр описанной около данного треугольника окружности лежит на диаметре CD, с другой стороны, т.к. AB – хорда этой окружности и диаметр, проведенный через ее середину всегда перпендикулярен этой хорде. Так как медиана CM не является высотой треугольника, то оба этих диаметра имеют только одну общую точку

M, которая и является центром описанной окружности. Следовательно, AB – диаметр окружности и $\angle ACB = 90°$.

Задача 4. Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) взята точка O так, что треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Найти OC, если известно, что $OA^2 + OB^2 = a^2$ ($a > 0$).

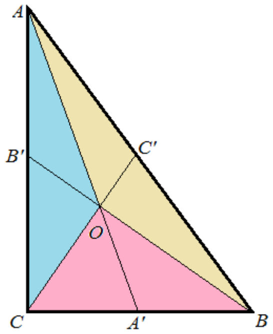

Рис. 10

Решение. По условию задачи треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Это сразу же наводит на мысль о том, что O – точка пересечения медиан треугольника ABC, так как обратное утверждение хорошо известно. Этот факт, действительно, нетрудно доказать (от противного) для любого треугольника. Дальнейшие вычисления очевидны (см. рис. 10):

$$OA = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}\sqrt{AC^2 + \frac{BC^2}{4}},\ OB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}\sqrt{BC^2 + \frac{AC^2}{4}},$$
$$OC = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}\frac{AB}{2} = \frac{AB}{3}.$$

Тогда:

$$a^2 = OA^2 + OB^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{5AB^2}{4} = 5\left(\frac{AB}{3}\right)^2 = 5OC^2.$$

Ответ. $OC = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Задача 5. В треугольнике KMN проведена высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найти высоту NA, биссектрису NB и медиану NC, если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R.

Ответ. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, R.

Задача 6. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найти длину отрезка CN, если катеты равны 1 и 4.

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Задача 7. В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $AB = c$, $BC = a$. Найти AC.

Ответ. $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{5}}$.

Благодаря этой задаче доказана **теорема**: *если две медианы треугольника, проведенные к сторонам* a *и* c, *взаимно перпендикулярны, то стороны треугольника связаны соотношением* $a^2 + c^2 = 5b^2$.

Верна и **обратная теорема**: *если в треугольнике стороны связаны соотношением* $a^2 + c^2 = 5b^2$, *то медианы, к сторонам* a *и* c, *взаимно перпендикулярны*.

Задача 8. В треугольнике ABC медианы AM и CL взаимно перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника ABM.

Ответ. $\frac{1}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}$.

Задача 9. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны, основание AC равно 2, а угол при основании равен 30°. Из вершины A к боковой стороне BC проведены биссектриса AE и медиана AD. Найти площадь треугольника ADE.

Ответ. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

Задача 10. В треугольнике ABC проведены медиана BM и биссектриса BK. Известно, что $\angle ABM = \frac{\pi}{4}$, $\angle CBM = \frac{\pi}{6}$, $AK = 6$. Найти KM.

Ответ. $3(\sqrt{2} - 1)$.

Список используемой литературы

1. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. Пер. с англ. –М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2002.
2. Лурье М.В. Геометрия. Техника решения задач (учебное пособие). – М.: УНЦ ДО, Физматлит, 2001.
3. Электронная библиотека журнала «Квант».
4. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб.пособие для 10 кл.ср.шк. –М.: Просвещение, 1989.
5. Лужина Л.М., Натяганов В.Л. Сборник задач по геометрии и тригонометрии. –М.: УНЦ ДО, 2003.