Иррациональные уравнения.

Иррациональными уравнениями называются уравнения, в которых присутствует знак радикала ($\sqrt{\ }$).

Напомним, что $\sqrt{a}$ — это такое неотрицательное число, которое в квадрате равно a.

Задача 1. Решить уравнение $(x^2-4)\sqrt{1-x}=0$.

Решение.

$$(x^2-4)\sqrt{1-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=0 \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ 1-x\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left\{\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x<1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $1; -2$.

Утверждение. Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \tag{1}$$

эквивалентно системе

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=(g(x))^2 \\ g(x)\geq 0 \end{array}\right. . \tag{2}$$

Действительно, если $x=a$ является корнем уравнения (1), то есть $\sqrt{f(a)}=g(a)$, то, возведя это равенство в квадрат, получим $f(a)=(g(a))^2$.

Из $\sqrt{f(a)}=g(a)$ следует также, что $g(a)\geq 0$, так как $\sqrt{f(a)}\geq 0$. Таким образом, $x=a$ удовлетворяет системе (2).

Если $x = a$ является корнем (2), то $g(a) \geq 0$ и $f(x) = (g(x))^2 \geq 0$. Следовательно, из обеих частей уравнения $f(x) = (g(x))^2$ можно извлечь корень. Получаем $\sqrt{f(a)} = g(a)$.

Заметим также, что уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ можно возвести в квадрат и решить получившееся уравнение.

Чтобы избавиться от посторонних корней, подставить получившиеся корни в $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Но подстановка, обычно, занимает много времени, поэтому лучше решать способом, указанным выше.

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt{x-1} = 3 - x$.

Решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x - 1 = (3-x)^2 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) = 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 3. Решить уравнение $\sqrt{x+1} = 6 - x$.

Решение.

$$\sqrt{x+1} = 6 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = (6-x)^2 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 13x + 35 = 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 13x + 35 = 0$ имеет корни $x = \frac{13-\sqrt{29}}{2}$ и $x = \frac{13+\sqrt{29}}{2}$. Первый корень меньше 6, а второй больше 6.

Ответ: $\frac{13-\sqrt{29}}{2}$.

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x - 1.$$

Решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 1 + x\sqrt{x^2 - 24} = (x-1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x^2 - 24} = x^2 - 2x \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Так как $x > 0$, то на него можно поделить:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 24} = x - 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 24 = (x-2)^2 \\ x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Ответ: 7.

Задача 5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x + 10} + 3\sqrt{7 - x} = 10.$$

Решение. Сделаем замену переменной $t = \sqrt{7 - x}$ ($x = 7 - t^2,\ \ t \geq 0$). Получим $\sqrt{24 - 2t^2} + 3t = 10$, то есть $\sqrt{24-2t^2} = 10-3t$. Проведем эквивалентные преобразования:

$$\begin{cases} \sqrt{24-2t^2} = 10-3t \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24-2t^2 = (10-3t)^2 \\ 10-3t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11t^2 - 60t + 76 = 0 \\ t \leq \frac{10}{3} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3\frac{5}{11} \end{array}\right. \\ 0 \leq t \leq 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$t = 2.$$

Вернемся к x:

$$\sqrt{7-x} = t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 7-x=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=3.$$

Ответ: 3.

Задача 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{3-x} = 1-\sqrt{x-2}$.

Решение. Сделаем замену переменной $t = \sqrt[3]{3-x}$ $(x = 3-t^3)$.

Получим $t = 1 - \sqrt{1-t^3}$, то есть $\sqrt{1-t^3} = 1-t$. Возведем обе части в квадрат:

$$\begin{cases} 1-t^3 = (1-t)^2 \\ 1-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-t)(t^2+2t) = 0 \\ t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: 2, 3, 11.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = c^2 \tag{3}$$

эквивалентно уравнению

$$\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)^2 = c^4,$$

так как в уравнении (3) левая и правая часть положительны.

Таким образом, задачу 5 можно решить с помощью возведения в квадрат обеих частей. Задачу 6 также можно решать с помощью возведения в степень, но это займет много времени.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \tag{4}$$

эквивалентно уравнению

$$\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)^2 = \left(\sqrt{h(x)}\right)^2,$$

так как в уравнении (4) левая и правая часть положительны.

Задача 7. Решить уравнение

$$\sqrt{15 - x} - \sqrt{x - 5} = \sqrt{x - 2}.$$

Решение. Перенесем $\sqrt{x-5}$ в правую часть (если сразу возвести в квадрат, то придется еще добавлять условие, что $\sqrt{15-x} - \sqrt{x-5} \geq 0$). Возведем обе части в квадрат:

$$(\sqrt{15-x})^2 = (\sqrt{x-5} + \sqrt{x-2})^2,$$

то есть

$$15 - x = (\sqrt{x-5})^2 + 2\sqrt{x-5}\sqrt{x-2} + (\sqrt{x-2})^2.$$

Неравенство $15 - x \geq 0$ можно не добавлять, так как справа выражение в квадрате (поэтому оно не меньше нуля). Проведем серию эквивалентных преобразований:

$$15 - x = x - 5 + 2\sqrt{x-5}\sqrt{x-2} + x - 2$$

$$22 - 3x = 2\sqrt{x-5}\sqrt{x-2}$$

$$\begin{cases} 22 - 3x = 2\sqrt{x^2 - 7x + 10} \\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (22 - 3x)^2 = 4(x^2 - 7x + 10) \\ 22 - 3x \geq 0 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 104x + 444 = 0 \\ x \leq 7\frac{1}{3} \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Уравнение $5x^2 - 104x + 444 = 0$ имеет корни $x = 6$ и $x = 14.8$, нам подходит только $x = 6$.

Ответ: 6.

Утверждение. Уравнение вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает имеет не более одного корня.

Действительно, разность $f(x) - g(x)$ — возрастающая функция, следовательно, она может пересекать ось абцисс не более чем в одной точке.

Посмотрим еще раз на задачу 7. Запишем ее в виде

$$\sqrt{15 - x} = \sqrt{x-5} + \sqrt{x-2}.$$

Функция слева убывает на своей области определения, а функция справа возрастает на своей области определения. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Попробуем его найти. В нашем случае очень легко выписать область определения трех корней уравнения: $x \in [5; 15]$. Подстановкой начнем перебирать целые числа из этого отрезка. Быстро получаем, что $x = 6$ является корнем. Следовательно, других корней нет.

Задача 2 также быстрее решается данным способом. Функция слева возрастает на своей области определения, а функция справа убывает на своей области определения. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Так как $3 - x$ и $x - 1$ должны быть больше нуля, то корень может находиться только на отрезке $[1; 3]$. Подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ является корнем.

В задаче 3 функция слева возрастает, а функция справа убывает. Но ее не получится решить таким способом, так как корень не является целым числом.

Задача 5 не решается данным способом, так как $y = \sqrt{2x + 10}$ возрастает, а $y = 3\sqrt{7 - x}$ убывает.

Задача 8. Решить уравнение

$$6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

Решение. Обозначим $a=\sqrt[6]{x-2}$, $b=\sqrt[6]{x-3}$. Уравнение примет вид $6b^2+a^2=5ab$, то есть

$$a^2-5ab+6b^2=0.$$

Так как $x=3$ не является решением уравнения, то можно поделить на b^2:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+6=0.$$

Получаем квадратное уравнение, находим корни $\frac{a}{b}=2$ и $\frac{a}{b}=3$. Вернемся к переменной x, получим $\sqrt[6]{x-2}=2\sqrt[6]{x-3}$ и $\sqrt[6]{x-2}=3\sqrt[6]{x-3}$. Возводим в шестую степень, получаем $x=\frac{190}{63}$ и $x=\frac{2185}{728}$.

Ответ: $\frac{190}{63}$, $\frac{2185}{728}$.

Задача 9. Решить уравнение

$$(5x-7)\sqrt{x}+(5x+2)\sqrt{1-x}=0.$$

Решение. Так как подкоренное выражение не может быть меньше нуля, то $x\in[0;1]$. Перенесем первое слагаемое в правую часть, получим

$$(5x+2)\sqrt{1-x}=(7-5x)\sqrt{x}.$$

Заметим, что при $x \in [0;1]$ обе части уравнения больше либо равны нулю. Проведем ряд эквивалентных преобразований:

$$(5x+2)\sqrt{1-x} = (5x-7)\sqrt{x}$$

$$((5x+2)\sqrt{1-x})^2 = ((7-5x)\sqrt{x})^2$$

$$\begin{cases} (25x^2+20x+4)(1-x) = (25x^2-70x+49)x \\ x \in [0;1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50x^3-75x^2+33x-4=0 \\ x \in [0;1] \end{cases}$$

Найдем корни с помощью схемы Горнера. Отрицательными корни быть не могут, так как тогда справа получится отрицательное число. Перечислим все возможные положительные числа, которые могут быть рациональными корнями: 1, 2, 4, 1/2, 1/5, 2/5, 4/5, 1/10, 1/25, 2/25, 4/25, 1/50 (см. теорему о рациональных корнях многочлена с рациональными коэффициентами).

	50	-75	33	-4
1	50	-25	8	4
2	50	25	83	162
4	50	125	533	>0
$\frac{1}{2}$	50	-50	8	0

Следовательно, $x = 1/2$ является корнем уравнения $50x^3-75x^2+33x-4=0$, причем оно представимо в виде $(x-1/2)(50x^2-50x+8)=0$. Корнями уравнения $50x^2-50x+8=0$ (то есть $25x^2-25x+4=0$) являются числа $x=1/5$ и $x=4/5$. Все корни меньше трех.

Ответ: 1/2, 1/5 и 4/5.

Второй способ решения задачи 9. Продемонстрируем следующий фокус: обозначим

$$f(x)=(5x-7)\sqrt{x}.$$

Подставим $x=1-t$, получим

$$f(1-t)=-(5t+2)\sqrt{1-t}.$$

Таким образом, уравнение

$$(5x-7)\sqrt{x}+(5x+2)\sqrt{1-x}=0$$

можно записать в виде $f(x)-f(1-x)=0$, то есть $f(x)=f(1-x)$. Подставим в него $x=1/2$, получим $f(1/2)=f(1/2)$. Следовательно, $x=1/2$ является корнем уравнения $(5x-7)\sqrt{x}+(5x+2)\sqrt{1-x}=0$. Далее, решаем задачу первым способом, но нам не придется искать корень с помощью схемы Горнера.

Задача 10. Решить уравнение

$$9\sqrt{y} + 2x + 3 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt[4]{y}.$$

Решение. Обозначим $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt[4]{y}$ и перенесем все слагаемые в левую часть. Уравнение примет вид $9b^2 - 6b + 2a^2 - 4a + 3 = 0$. Выделим полный квадрат (с переменной b): $(3b-1)^2 + 2a^2 - 4a + 2 = 0$. Выделим полный квадрат (с переменной a):

$$(3b - 1)^2 + 2(a - 1)^2 = 0.$$

Так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным, то полученное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} 3b - 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{81} \\ x = 1 \end{cases} .$$

Ответ: $x = 1$, $y = \frac{1}{81}$.

Неравенство Коши. Для любых неотрицательных чисел a и b среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2},$$

причем равенство выполняется только при $a = b$.

Упражнение. Докажите это утверждение.

Задача 11. Решить уравнение

$$\sqrt{(x^2+5)(x^2-4x-3)}=x^2-2x+1.$$

Решение. Заметим, что $\frac{x^2+5+x^2-4x-3}{2} = x^2-2x+1$. Обозначим $a=x^2+5$, $b=x^2-4x-3$, уравнение примет вид

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}.$$

Так как подкоренное выражение не может быть отрицательным и корень не может быть отрицательным, то $ab\geq 0$ и $a+b\geq 0$, следовательно, $a\geq 0$, $b\geq 0$.

Воспользовавшись неравенством Коши, получим:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

причем равенство выполняется только при $a = b$. Следовательно,

$$x^2+5=x^2-4x-3,$$

то есть $x = -0.5$.

Ответ: -2.

Задача 12. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-17}+\frac{1}{\sqrt{x^2-17}}=2-\sqrt{x}.$$

Решение. Из утверждения части 11 следует, что $\sqrt{x^2-17}+\frac{1}{\sqrt{x^2-17}}\geq 2$. Следовательно, $2-\sqrt{x}\geq 2$, то есть $x=0$.

Но $x=0$ не является решением уравнения

$$\sqrt{x^2-17}+\frac{1}{\sqrt{x^2-17}}=2-\sqrt{x},$$

следовательно, оно не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Неравенство Коши для n элементов. Для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

причем равенство выполняется только при

$$a_1=a_2=\ldots=a_n.$$

Задачи.

Решить уравнения

1. $(x^2-77)\sqrt{7-x}=0$;
2. $\sqrt{-x}=x+1$;
3. $3\sqrt{2-x}=3-x$;
4. $2\sqrt{-(x+2)(x+4)}=-(x+2)$;
5. $\sqrt{7-x}=\sqrt{x}-\sqrt{7}$;
6. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=0$.

Ответы к задачам. (1) $-\sqrt{77}$, 7; (2) $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; (3) $\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$; (4) -2, -3.6; (5) 7; (6) нет корней.

Иррациональные неравенства.

Иррациональными неравенствами называются неравенства, в которых присутствует знак радикала ($\sqrt{\ }$).

Задача 1. Решить неравенство

$$(x-4)(x^2-9)\sqrt{x-1} > 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x-4)(x^2-9)\sqrt{x-1}.$$

Ее область определения — $[1;+\infty)$ корнями уравнения $f(x)=0$ являются числа $x=1$, $x=3$ и $x=4$. Так как функция непрерывна, можно решить задачу методом интервалов. Отмечаем на числовой прямой область определения и нули функции (см. рис. 1). Область определения разбивается на три промежутка. Находим на них знаки функции $f(x)$ и выписываем ответ.

Ответ: $(1;3)\cup(4;+\infty)$.

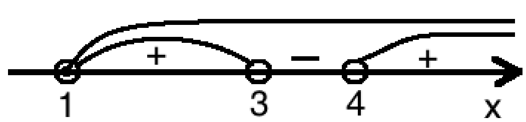

рис.1

Если мы уже решили иррациональное уравнение $f(x)=0$, то решить неравенство $f(x)>0$, как правило, не составит особого труда. Для этого нужно найти область определения функции $y = f(x)$, отметить это на прямой. После этого добавить на прямую точки, в которых $f(x) = 0$. Таким образом, прямая разобьется на промежутки, на которых знак функции будет постоянен, и нам будет достаточно подставить по одному числу из каждого промежутка.

Задача 2. Решить неравенство $\sqrt{x-1} > 3 - x$.

Решение. Корнем уравнения $\sqrt{x-1} = 3 - x$ является число 2 (см. задачу 2 из темы "Иррациональные уравнения").

Отмечаем на прямой область определения функции $y = \sqrt{x-1} - 3 + x$. Это промежуток $[1; +\infty)$. Отмечаем точку $x = 2$ (см. рисунок 2).

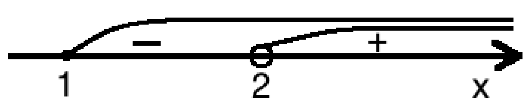

рис.2

Для решения неравенства $\sqrt{x-1} - (3 - x) > 0$ нужно рассмотреть два промежутка: $[1; 2)$ и $(2; +\infty)$. Сразу отметим, что число 2 не удовлетворяет неравенству.

Возьмем любое число из промежутка $[1; 2)$, например, $x = 1.5$, получим $\sqrt{0.5} - 1.5 < 0$. Следовательно, на этом промежутке неравенство не выполняется.

Возьмем число $x = 5 \in (2; +\infty)$, получим $\sqrt{4} + 2 > 0$. Следовательно, на этом промежутке неравенство выполняется.

Таким образом, неравенство $\sqrt{x-1} > 3 - x$ выполняется на промежутке $(2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

Утверждение 1. Неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

эквивалентно совокупности систем

$$(*) \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Упражнение. Докажите это утверждение.

Заметим, что совокупность систем $(*)$ можно заменить на более короткую эквивалентную ей совокупность

$$(*) \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ f(x) > (g(x))^2 \end{array}\right.$$

Задача 3. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 2 - x$.

Решение. Сделаем эквивалентные преобразования:

$$\sqrt{x-1} < 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < (2-x)^2 \\ x-5 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+5>0 \\ x\geq 1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \frac{5-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{5}}{2}; +\infty) \\ x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

Так как $\frac{5-\sqrt{5}}{2} > \frac{5-3}{2} = 1$; $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{5-1}{2} = 2$ и $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 2$, то $x \in [1; \frac{5-\sqrt{5}}{2})$.

Ответ: $x \in [1; \frac{5-\sqrt{5}}{2})$.

Задача 4. Решить неравенство $\sqrt{x-1} > 2 - x$.

Решение. Сделаем эквивалентные преобразования:

$$\sqrt{x-1} > 2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2-x<0 \\ x-1\geq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2-x\geq 0 \\ x-1>(2-x)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>2 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x^2-5x+5<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ \left\{\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x\in(\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Так как $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2 < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, то $x\in(\frac{5-\sqrt{5}}{2};+\infty)$ (см.

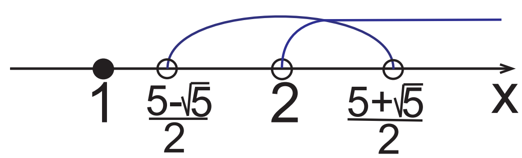

рис.4

рисунок 4).

Ответ: $x\in(\frac{5-\sqrt{5}}{2};+\infty)$.

Задача 5. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{5-x}\le 4.$$

Решение. Возведем обе части в квадрат, получим:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{5-x}\le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+6+2\sqrt{-2x^2+9x+5}\le 16 \\ x\in[-\frac{1}{2};5] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{-2x^2+9x+5}\le 10-x \\ x\in[-\frac{1}{2};5] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-2x^2+9x+5)\le(10-x)^2 \\ x\in[-\frac{1}{2};5] \\ x\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-56x+80\ge 0 \\ x\in[-\frac{1}{2};5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;2\frac{2}{9}]\cup[4;+\infty) \\ x\in[-\frac{1}{2};5] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2};2\frac{2}{9}\right]\cup[4;5]$$

Следовательно,

Ответ: $x\in[\frac{1}{2};2\frac{2}{9}]\cup[4;5]$.

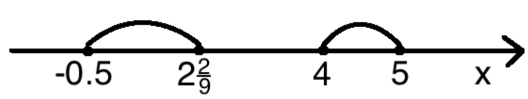

рис.5

Задача 6. Решить неравенство

$$\sqrt{-(x+2)(x+4)} \le -(x+2). \tag{6}$$

Решение. Областью определения функции

$$f(x) = \sqrt{-(x+2)(x+4)} + (x+2)$$

является отрезок $[-4; -2]$.

Корнями уравнения $\sqrt{-(x+2)(x+4)} = -(x+2)$ являются числа $x = -3$ и $x = -2$. Они удовлетворяют неравенству (6), так как оно нестрогое. Находим остальные корни неравенства (6) методом интервалов.

Ответ: $x \in [-4; -3] \cup \{-2\}$.

Задача 7. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{5-4x}} + \sqrt{5-4x} \le 1 + 2x - x^2. \tag{7}$$

Решение. Напомним, что для любого $a > 0$ выполняется неравенство $a + \frac{1}{a} \ge 2$, причем равенство выполняется только при $a = 1$.

Следовательно, $\frac{1}{\sqrt{5-4x}} + \sqrt{5-4x} \ge 2$.

Так как $1+2x-x^2 = 2-(x-1)^2 \le 2$, то неравенство (7) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5-4x}} + \sqrt{5-4x} = 2 \\ 2 - (x-1)^2 = 2 \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 5-4x=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Ответ: 1.

Задача 8. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-\sqrt{x-7})(\sqrt{2x-3}-x)} \leq \sqrt{2x-3}-\sqrt{x-7}.$$

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-7}=(x-\sqrt{x-7})+(\sqrt{2x-3}-x).$$

Обозначим $a=x-\sqrt{x-7}$, $b=\sqrt{2x-3}-x$. Нервенство примет вид $\sqrt{ab} \leq a+b$.

Так как подкоренное выражение и квадратный корень не могут быть отрицательными, то

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a+b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}.$$

Вернемся к x:

$$\begin{cases} x-\sqrt{x-7} \geq 0 \\ \sqrt{2x-3}-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{x-7} \\ \sqrt{2x-3} \geq x \\ x \geq 7 \end{cases}.$$

Уравнение $\sqrt{2x-3}=x$ не имеет корней, соответственно, неравенство $\sqrt{2x-3} \geq x$ либо выполняется для любого $x \in [7;+\infty)$, либо не имеет решений. Подставим $x=10$, получим $\sqrt{17} \geq 10$, что неверно. Следовательно, неравенство не имеет корней. Это означает, что неравенство

$$\sqrt{(x-\sqrt{x-7})(\sqrt{2x-3}-x)} \le \sqrt{2x-3}-\sqrt{x-7}$$

не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Задача 9. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-\sqrt{x{+}2})(\sqrt{4x{+}5}-x)} \le \sqrt{4x{+}5}-\sqrt{x{+}2}. \quad (9)$$

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+2} = (x-\sqrt{x+2}) + (\sqrt{4x+5}-x).$$

Обозначим $a = x-\sqrt{x+2}$, $b = \sqrt{4x+5}-x$. Неравенство примет вид $\sqrt{ab} \le a+b$.

Так как подкоренное выражение и квадратный корень не могут быть отрицательными, то

$$\begin{cases} ab \ge 0 \\ a+b \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$$

Воспользуемся неравенством Коши, получим:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le a+b.$$

Следовательно, неравенство $\sqrt{ab} \le a+b$ выполняется для всех $a \ge 0$, $b \ge 0$.

Вернемся к x:

$$(**) \qquad \begin{cases} x - \sqrt{x+2} \geq 0 \\ \sqrt{4x+5} - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{x+2} \\ \sqrt{4x+5} \geq x \\ x \geq -1.25 \end{cases}$$

Корнем уравнения $x = \sqrt{x+2}$ является число 2, соответственно, для решения неравенства $x \geq \sqrt{x+2}$ нужно рассмотреть два промежутка: $[-1.25; 2)$ и $(2; +\infty)$. Сразу отметим, что число 2 удовлетворяет неравенству. Возьмем любое число из промежутка $[-1.25; 2)$, например, $x = 0$, получим $0 \geq \sqrt{2}$, что неверно.

Для $7 \in (2; +\infty)$ получим $7 \geq \sqrt{9}$. Следовательно, на этом промежутке неравенство выполняется. Таким образом, неравенство $x \geq \sqrt{x+2}$ выполняется на промежутке $[2; +\infty)$.

Корнем уравнения $\sqrt{4x+5} = x$ является число 5, соответственно, для решения неравенства

$$\sqrt{4x+5} \geq x$$

нужно рассмотреть два промежутка: $[2; 5)$ и $(5; +\infty)$. Сразу отметим, что число 5 удовлетворяет неравенству. Для $x = 3 \in [2; 5)$ получим $\sqrt{17} \geq 3$. Следовательно, на этом промежутке неравенство выполняется.

Для $10 \in (5; +\infty)$ получим $\sqrt{45} \geq 10$, что неверно.

Таким образом, неравенство $\sqrt{4x+5} = x$ выполняется на отрезке $[2;5]$.

Из вышеизложенного следует, что решением системы $(**)$ (а также неравенства (9)) является отрезок $[2;5]$.

Ответ: $[2;5]$.

Задача 10. Решить неравенство

$$\sqrt{15-x} - \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-2}.$$

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{15-x} - \sqrt{x-5}$ убывает, а функция $g(x) = \sqrt{x-2}$ возрастает на всей области определения. Следовательно , они пересекаются не более чем в одной точке. Функции определены при $x \in [5;15]$. С помощью подстановки можно убедится, что они пересекаются при $x = 6$. Следовательно, при $x < 6$ имеем $f(x) > g(x)$, а при $x > 6$ имеем $f(x) < g(x)$.

Ответ: $x \in [6;15]$.

Задача 11. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leq 0$.

Ответ: $x \in [-7;-6) \cup [-5;-1] \cup \{1\}$.

Задача 12. Решить неравенство $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

Ответ: $x \in [-4;1] \cup \{2\}$.

Задачи.

Решить неравенства

1. $(x^2-77)\sqrt{7-x}>0$;

2. $(x^2-77)\sqrt[3]{7-x}>0$;

3. $x+4\sqrt{x}-12<0$

4. $\sqrt{-x}<x+1$;

5. $\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1}<1$;

6. $\sqrt{7-x}<\sqrt{x}-\sqrt{7}$;

Ответы к задачам. (1) $(-\infty;-\sqrt{77})$; (2) $(-\infty;-\sqrt{77})\cup(7;\sqrt{77})$; (3) $(0;4)$; (4) $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};0)$; (5) $[-2;-1)\cup(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}]$; (6) нет корней.