

Олимпиада ПриМат
Старшая лига
Задача 1



Однажды придя из школы, Ваня обнаружил на кухне целую кастрюлю малинового варенья. Он очень любил сладкое, поэтому незаметно для себя съел треть от объема кастрюли. Ваня вспомнил, что его мама сварила варенье специально для гостей, поэтому чтобы никто не заметил, он долил доверху сладкий сироп и тщательно все перемешал. Так как через полчаса домой никто не вернулся, Ваня снова потянулся к кастрюле опять съел

треть содержимого кастрюли, затем снова добавил сахарный сироп и перемешал содержимое. Мальчик был очень голоден и очень любил сладкое, так что такую операцию он повторял каждые полчаса.

Через какое время после прихода домой Ваня съест 90% всего варенья? Сколько сиропа он съест к этому моменту? Каждую порцию он съедает мгновенно. Объем кастрюли 1 литр.

Решение:

Концентрация варенья в кастрюле уменьшается в геометрической прогрессии по закону:

$$C_{n+1} = \frac{2}{3} C_n$$

Начальная концентрация $C_0 = 1$, в момент времени $t = 0.5 n$ часов Ваня съедает $M_n = \frac{1}{3} C_n$ всего варенья. Таким образом, нужно найти n такое, что

$$M = M_0 + \dots + M_n \geq 0.9$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$M = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Найдем n :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < 0.1, \quad n > 5$$

Так что 90% всего варенья Ваня съест через 2.5 часа после прихода домой.

Ваня 6 раз съедал по $\frac{1}{3}$ литра, то есть всего съел 2 литра разных смесей, при этом чистого варенья $(1 - (\frac{2}{3})^6) = \frac{665}{729}$ л. Таким образом, сиропа он съел

$$\frac{6}{3} - \frac{665}{729} = \frac{793}{729} \approx 1.09 \text{ литра}$$

Ответ: 2,5 часа, 1.09 л