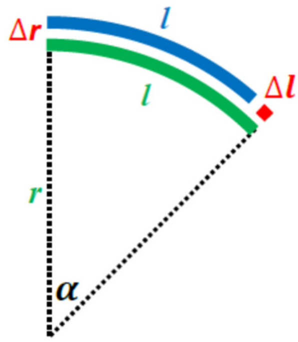
Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
03.11.2022

Задача 1

Учитель распечатал 40 билетов для предстоящего экзамена и сложил их в одну пачку. Обрезав её со всех четырёх сторон, он получил аккуратную ровную стопку из 40 листов (см. верхний рисунок), однако их края оказались кое-где слегка сцеплены. Раздавать билеты из такой стопки неудобно. Поэтому учитель хочет сдвинуть их в стопке так, чтобы каждый следующий билет был смещён относительно предыдущего в одном и том же направлении на одинаковое расстояние (например, на 1 *мм*; см. нижний рисунок). Предложите способ, как это сделать **быстро** (скажем, за 5 *с*) и **одними руками** (без использования каких-либо предметов), но с помощью геометрии. Объясните, почему все сдвиги билетов будут одинаковыми.

Ответ: сдавив стопку слева пальцами левой руки, нужно изогнуть её дугообразно правой рукой, а затем, сдавив изогнутую стопку справа пальцами правой руки, левой рукой выпрямить её, причём эту операцию можно повторить несколько раз.

Решение. Пусть два соседних листа с фиксированным левым краем и длиной l каждый изогнуты дугой окружностей радиусом r и $r + \Delta r$ (на рисунке это внутренняя зелёная и внешняя синяя дуги равной длины) соответственно. Тогда если угол изгиба равен α *рад*, а толщина листа равна Δr, то имеем

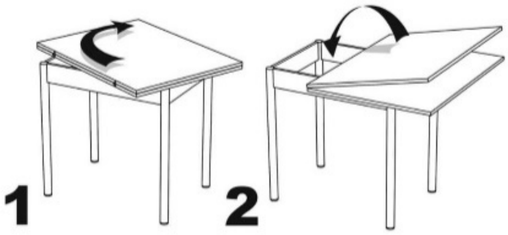


$$l = \alpha r, \quad l + \Delta l = \alpha(r + \Delta r) \quad \Longrightarrow \quad \Delta l = \alpha \Delta r,$$

а значит, сдвиг Δl правого края верхнего листа влево по отношению к нижнему листу (горизонтальный после выпрямления стопки при фиксации её правого края) зависит только от параметров α и Δr, которые для всех листов стопки окажутся одинаковыми. Поэтому и сам сдвиг для них всех будет одинаков.

Задача 2

Сложенный обеденный стол имеет форму прямоугольника, короткая сторона которого равна 60 *см*, а края выступают от прямоугольного каркаса стола (его нижней опорной части с ножками) во все четыре стороны на одинаковое расстояние. Стол раскладывается, как показано на рисунке:



1) сначала сложенную крышку стола поворачивают в горизонтальной плоскости;

2) затем её раскрывают как книжку (относительно длинной стороны).

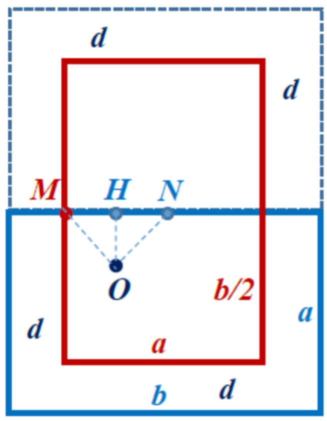
А. Найдите на поверхности сложенного стола точку, вокруг которой его поворачивают при раскладывании. В ответе укажите расстояние от этой точки до **ближайшей** стороны сложенного стола.

Б. Какой должна быть длинная сторона стола, чтобы в раскрытом состоянии его края тоже выступали от его каркаса во все четыре стороны на одинаковое расстояние?

Ответы: **А.** 15 *см*; **Б.** 90 *см*.

Решение. Пусть длины сторон сложенного стола — это $a = 60$ и $b > 60$.

А. Одна из длинных сторон сложенного стола после поворота вокруг искомой точки O оказывается прямо на перпендикулярной ей оси симметрии стола, а середина M этой стороны, лежавшая сначала на этой же оси симметрии, после поворота попадает в центр N самого стола (на рисунке красный прямоугольник поворачивается в синий). Поэтому стол поворачивается на 90°, а для высоты OH прямоугольного треугольника MON получаем



$$\angle MON = 90°, \qquad OM = ON, \qquad MN = a/2 = 30, \qquad OH = MN/2 = 15.$$

Таким образом, расстояние от точки O до одной из длинных сторон стола равно 15, а до остальных сторон — больше, поскольку расстояния до противоположной длинной стороны и до двух коротких сторон соответственно равны

$$a - 15 = 45 > 15, \qquad b/2 \pm 15 > a/2 - 15 = 15.$$

Б. Пусть d — это величина, на которую поверхность развернутого стола выступает с каждой стороны за поверхность сложенного стола. Запишем и преобразуем это условие:

$$b - a = 2d = 2a - b \implies b = 3a/2 = 90.$$

Задача 3

Известно, что если фигуры подобны с коэффициентом k, то отношение их соответствующих линейных размеров равно k, площадей — k^2, а объёмов — k^3.

I. Конический фужер до краёв заполнен лимонадом (см. рисунок). Знайка отпил из фужера так, что высота уровня лимонада в его конической части уменьшилась на 1/4, а Незнайка допил всё остальное.

А. Кто из них выпил лимонада больше и во сколько раз?

Б. На какую долю высоты на самом деле должен был Знайка понизить уровень лимонада, чтобы они с Незнайкой выпили поровну?

II. На конической части колбы (см. рисунок) нанесены несколько делений так, что если налить в колбу жидкость, то её объём между соседними делениями будет один и тот же. Расстояние между первым (нижним) и вторым делениями на **данной** колбе равно 10 *мм*, а между вторым и третьим — 13 *мм*.

В. Найдите расстояние между третьим и четвёртым делениями на колбе.

Г. Каково для данной колбы наибольшее **возможное** число делений? Например, на рисунке число делений равно 4.

Ответы: **А.** Знайка, $37/27 = 1{,}37\ldots$; **Б.** $1 - 1/\sqrt[3]{2} = 0{,}20\ldots$; **В.** $\approx 20{,}4$ *мм*; **Г.** 4.

Решение. **I.** Примем за единицу высоту конической части фужера.

А. Первый объём относится ко второму, как $(1^3 - (3/4)^3) : (3/4)^3 = 37 : 27$.

Б. Для искомой части x имеем $2(1-x)^3 = 1 \Longrightarrow x = 1 - 1/\sqrt[3]{2} = 0{,}20629\ldots$

II. Проведём горизонтальные плоскости через все деления колбы и мысленно достроим её вверх до полного конуса, основание которого совпадает с плоскостью, проходящей через 1-е деление. Пусть высота этого конуса равна 1, расстояние от его основания до 2-й плоскости — x, а до $(i+1)$-й — $a_i x$. Тогда объём части конуса от основания до $(i+1)$-й плоскости в i раз больше, чем до 2-й плоскости, поэтому

$$i(1^3 - (1-x)^3) = 1^3 - (1-a_i x)^3 \Longrightarrow ({a_i}^3 - i)x^2 - 3({a_i}^2 - i)x + 3(a_i - i) = 0.$$

В случае $i = 2$ имеем $a_2 \equiv 1 + 1{,}3 = 2{,}3$ и для числа $x < 0{,}5$ получаем уравнение

$$10{,}167x^2 - 9{,}87x + 0{,}9 = 0 \Longrightarrow x = \frac{9{,}87 - 7{,}7985\ldots}{20{,}334} = 0{,}10187\ldots \approx 0{,}10.$$

В. Если $i = 3$, то теперь уже при $x = 0{,}10187\ldots$ имеем

$$a_3 x = 1 + \sqrt[3]{3(1-(1-x)^3)-1} \Longrightarrow$$

$$a_3 = 0{,}10187\ldots^{-1}\left(1 + \sqrt[3]{3(1-(1-0{,}10187\ldots)^3)-1}\right) = 4{,}3424\ldots \approx 4{,}34,$$

а значит, искомое расстояние между делениями равно $10(a_3 - a_2) \approx 20{,}4\ мм$.

Г. Найдём для данной колбы наибольшее целое i, для которого $a_i x < 1$:

$$1 + \sqrt[3]{i(1-(1-x)^3)-1} < 1 \Leftrightarrow i(1-(1-0{,}10187\ldots)^3) < 1 \Leftrightarrow i < 3{,}6\ldots$$

Поэтому искомое i равно 3, а искомое наибольшее число делений равно $i + 1 = 4$.