



Числа Каталана

Автор: ученица 9Б класса
МБОУ лицей №67 г.Иваново
Паспортникова Екатерина

Научный руководитель: учитель
математики лицея № 67 г.Иваново
Пятова Людмила Андреевна

Цель:

Доказать эквивалентность способов определения числа Каталана через скобочные структуры и бинарные деревья.

Задачи:

1. Определить понятие чисел Каталана
2. Сформулировать определения чисел Каталана через скобочные структуры и бинарные деревья
3. Доказать эквивалентность способов «бинарных деревьев» и «скобочных структур» на конкретном примере.

Числа Каталáна — числовая последовательность, встречающаяся во многих задачах комбинаторики.



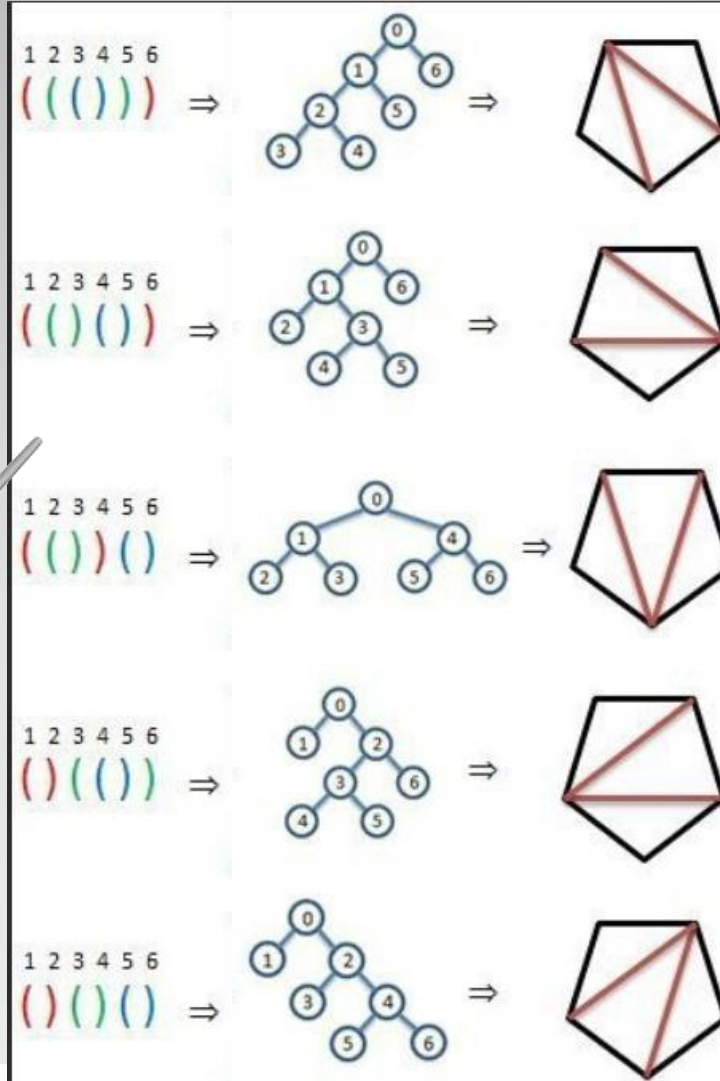
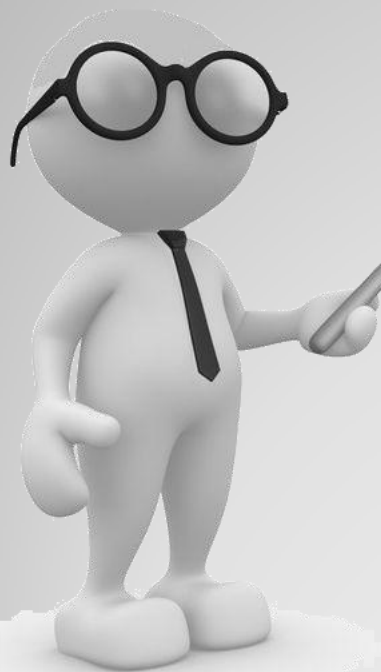
Леонард Эйлер



Эжен Шарль Каталан

- **Число Каталана** – это количество способов вычислить выражение $a_1 * \dots * a_n$, где звездочка обозначает операцию, а вот $a_1, \dots, a_n$ некоторые числа.
- Последовательность:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C _n	1	1	2	5	14	42	132	429



Рекуррентная формула для C_n

- Пронумеруем знаки умножения

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{n-1} \times a_n.$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (n-2) \quad (n-1)$$

- В каждом текущем r -м случае произведение $(a_1 \times \dots \times a_r) \times (a_{r+1} \times \dots \times a_n)$

*Первые r символов по определению могут быть скомбинированы C_r способами,
последние $n-r$ символов — C_{n-r} способами

Рекуррентная формула для C_n

$$C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_1$$



Нахождение C_7

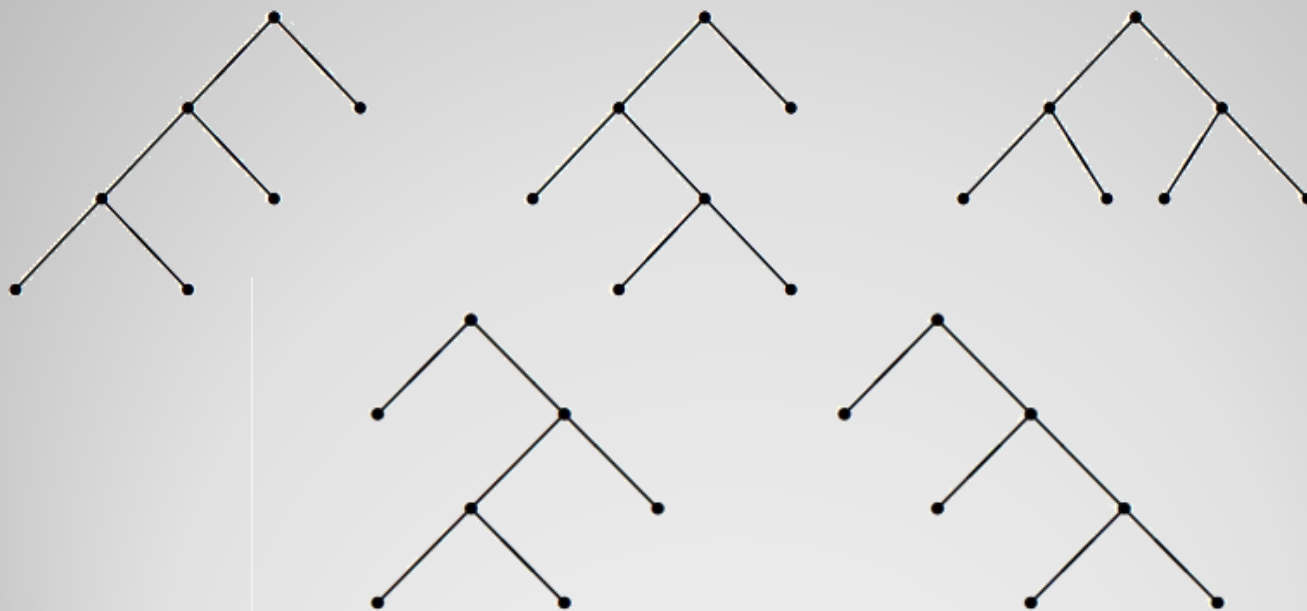
1	1	2	5	14	42
42	14	5	2	1	1

$$1*42+1*14+2*5+14*1+42*1=$$
$$42+14+10+14+42=132$$

$$C_7=132$$

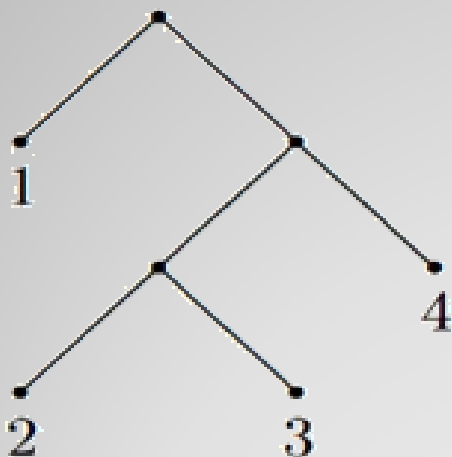
Бинарные деревья

Теорема: Количество бинарных деревьев с n -концевыми вершинами равно C_{n-1} .



Бинарные деревья

1. Занумеруем концевые вершины бинарного дерева числами от 1 до n следующим образом:



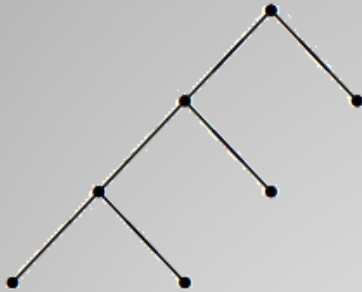
Уровень $k-2$

Уровень $k-1$

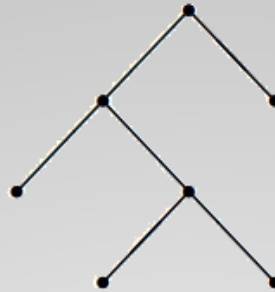
Уровень k

$$\begin{aligned} A_1 a_2 a_3 a_4 &\Rightarrow a_1 a_2 * a_3 a_4 \Rightarrow a_1 (a_2 * a_3) * a_4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4) \Rightarrow (a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4)) \end{aligned}$$

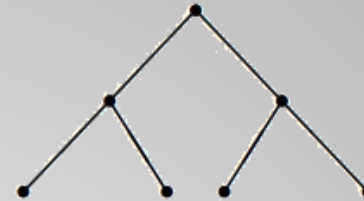
Бинарные деревья



$((((a_1 * a_2) * a_3) * a_4))$

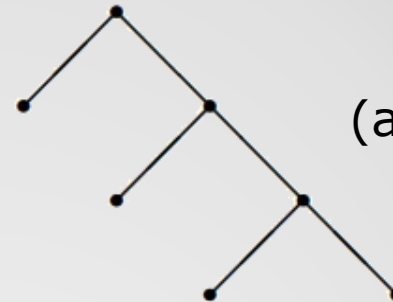
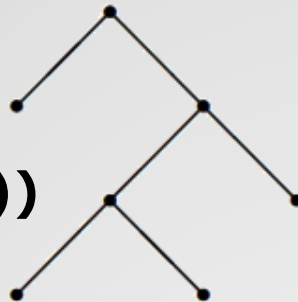


$((a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4)$



$((a_1 * a_2) * (a_3 * a_4))$

$(a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4))$



$(a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4)))$

Бинарные деревья

Мы доказали, что при 4 ветвях у бинарного дерева мы получаем 5 разных деревьев (выражений)



Бинарные деревья $\Rightarrow$ Скобочные структуры

$(a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4)) \Rightarrow () (())$

$((a_1 * a_2) * a_3) * a_4 \Rightarrow (((())))$

$((a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4) \Rightarrow (() (()))$

$((a_1 * a_2) * (a_3 * a_4)) \Rightarrow (((())) (()))$

$(a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4))) \Rightarrow () (()) ()$



Бинарные деревья $\Rightarrow$ Скобочные структуры

➤ В итоге, получаются такие скобочные структуры:

$((()))$, $((()()))$, $((())())$, $(())(())$, $(())()()$.

$$(((2 + 3) \times 4) - 5) = 15$$

$$((2 + 3) \times (4 - 5)) = -5$$

$$((2 + (3 \times 4)) - 5) = 9$$

$$(2 + ((3 \times 4) - 5)) = 9$$

$$(2 + (3 \times (4 - 5))) = -1$$

$$2 + 3 \times 4 - 5$$



Бинарные деревья $\Rightarrow$ Скобочные структуры

Мы доказали теорему бинарных деревьев, что при 4 операндах будет 5 различных результатов



Скобочные структуры $\Rightarrow$ Бинарные деревья

Теорема: C_n -количество «правильных»
скобочных структур из $2n$ скобок
(n -открывающих и n -закрывающих)

$$(((2 + 3) \times 4) - 5) = 1 \Rightarrow (((()))$$

$$((2 + 3) \times (4 - 5)) = -5 \Rightarrow (()())$$

$$((2 + (3 \times 4)) - 5) = 9 \Rightarrow (()())$$

$$(2 + ((3 \times 4) - 5)) = 9 \Rightarrow (()())$$

$$(2 + (3 \times (4 - 5))) = -1 \Rightarrow (()())$$

$$2 + 3 \times 4 - 5$$



Скобочные структуры $\Rightarrow$ Бинарные деревья

➤ Перед закрывающей скобкой ставим знак операции

$$((())) \Rightarrow (((a_1 * a_2) * a_3) * a_4)$$

$$(())() \Rightarrow ((a_1 * a_2) * (a_3 * a_4))$$

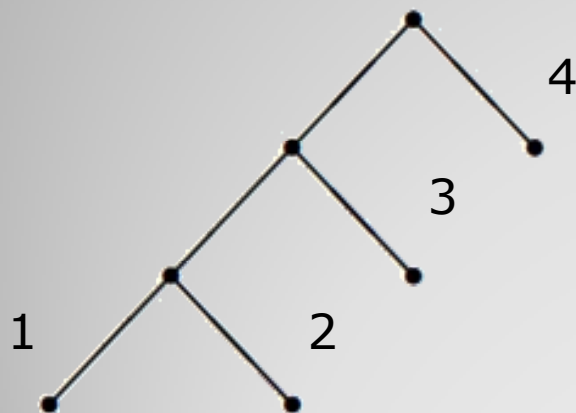
$$(())() \Rightarrow ((a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4)$$

$$()() \Rightarrow (a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4))$$

$$()()() \Rightarrow (a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4)))$$

Скобочные структуры $\Rightarrow$ Бинарные деревья

➤ Нарисуем бинарное дерево по первому выражению $((a_1 * a_2) * a_3) * a_4$



Уровень k-2

Уровень k-1

Уровень k

$((())) \Rightarrow ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4$
 $((())()) \Rightarrow ((a_1 * a_2) * (a_3 * a_4))$
 $((())()) \Rightarrow ((a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4)$
 $()(()) \Rightarrow (a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4))$
 $()()() \Rightarrow (a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4)))$

Скобочные структуры $\Rightarrow$ Бинарные деревья

Мы доказали, что при $n=3$ получается 5 различных результатов. Следовательно, $C_3=5$



Вывод:

Числа Каталана играют в комбинаторике важную роль.



Спасибо за внимание!